1. Арифметика
Кейбір математикалық белгілер

Таңба	Мағынасы	Мысал
$=$	Тең	а=в
$\neq$	Тең емес	а≠в
$\approx$	Жуықтап тең	а≈в
>,<	Үлкен, кіші	7>4, 2<5
$\geq$	Үлкен немесе тең	а≥в
$\leq$	Кіші немесе тең	а≤в
$\vert\ \vert$	Абсолют шама	$\vert a\vert$
$\sqrt[n]{\ }$	n дәрежелі түбір	$\sqrt[3]{27}=3$
!	факториал	4!=1*2*3*4=24
$\log_a b$	Логарифм а негізінде b	$\log_2 16=4$
Σ	Қосынды	
Δ	Үшбұрыш	ΔABC
$\angle$	Бұрыш	$\angle ABC$
$\cup$	Доға	$\cup AB$
$\Vert$	Параллель	а$\Vert$в
$\perp$	Перпендикуляр	а$\perp$в
$\sim$	Ұқсас	а$\sim$в
^{0} $'$ $''$	Градус Минут Секунд	$30^0 15' 18''$
sin	Синус	$\sin 90^0=1$
cos	Косинус	$\cos\pi=-1$
tg	Тангенс	$tg60^0=\sqrt{3}$
ctg	Котангенс	$ctg45^0=1$
arcsin	Арксинус	$\arcsin 1=90^0$
arccos	Арккосинус	$\arccos(-1)=\pi$
arctg	Арктангенс	$arctg\sqrt{3}=60^0$
arcctg	Арккотангенс	$arcctg1=45^0$

Рационал (бөлшек) сандарға қолданылатын арифметикалық амалдар ережесі

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$
$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Бөлінгіштік белгілері

2-ге бөлінгіштік белгісі. 2-ге бөлінетін сандарды жұп сандар, бөлінбейтін сандарды тақ сандар деп атайды. Егер санның соңғы цифры жұп цифр немесе нөл болса, онда сан 2-ге бөлінеді. Қалған жағдайда 2-ге бөлінбейді.

4-ке бөлінгіштік белгісі. Егер санның соңғы екі цифры нөл немесе 4-ке бөлінетін сан болса, онда сан 4-ке бөлінеді. Қалған жағдайда 4-ке бөлінбейді.

8-ге бөлінгіштік белгісі. Егер санның соңғы үш цифры нөл немесе 8-ге бөлінетін сан болса, онда сан 8-ге бөлінеді. Қалған жағдайда 8-ге бөлінбейді.

3 және 9-ға бөлінгіштік белгілері. Егер санның цифрларының қосындысы 3-ке бөлінсе 3-ке бөлінеді, ал 9-ға бөлінсе 9-ға бөлінеді.
6-ға бөлінгіштік белгісі. Егер сан әрі 2-ге, әрі 3-ке бөлінсе, онда ол сан 6-ға бөлінеді.
5-ке бөлінгіштік белгісі. Егер санның соңғы цифры 0 немесе 5 болса, онда сан 5-ке бөлінеді.
25-ке бөлінгіштік белгісі. Егер санның соңғы екі цифры 0 немесе 25-ке бөлінетін сандармен аяқталса(яғни 00, 25, 50, 75), онда сан 25-ке бөлінеді.
10, 100 және 1000-ға бөлінгіштік белгілері. Соңғы цифры нөл болса, 10-ға бөлінеді. Соңғы екі цифры нөл болса, 100-ға бөлінеді. Соңғы үш цифры нөл болса, 1000-ға бөлінеді.
11-ге бөлінгіштік белгісі. Егер санның тақ орнында тұрған цифрларының қосындысынан жұп орнында тұрған цифрларының қосындысының айырмасы нөл немесе 11-ге бөлінетін болса, онда сан 11-ге бөлінеді.

Пропорциялар.

1. Пропорцияда $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ a және d – шеткі, b және c- ортаңғы мүшелер.
   Пропорцияның негізгі қасиеті: $a\cdot d=b\cdot c$

2. Пропорцияның мүшелерінің орнын ауыстыру:
   $а)\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $ә)\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ $б)\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ $в)\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

3. Пропорцияның көбейтіндісі: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ қатысты берілген, келесі қатыстар орынды:
   $а)\frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$ $ә)\frac{a\pm c}{b\pm d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ $б)\frac{\alpha a+\beta b}{\lambda a+\mu b}=\frac{\alpha c+\beta d}{\lambda c+\mu d}$ α,β,λ,μ - біруақытта нөл болмайтын сандар.

2. Алгебра

Қысқаша көбейту формулалары

1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (екі өрнектің қосындысының квадраты)
2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ (екі өрнектің айырмасының квадраты)
3) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ (екі өрнектің квадраттарының айырмасы)
4) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ (екі өрнектің кубтарының қосындысы)
5) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (екі өрнектің кубтарының айырмасы)
6) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (екі өрнектің қосындысының кубы)
7) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (екі өрнектің айырмасының кубы)

Дәреже қасиеттері

1. $a^0=1$.
2. $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$
3. $a^m:a^n=a^{m-n}$
4. $(a^m)^n=a^{mn}$
5. $(a\cdot b)^m=a^m\cdot b^m$
6. $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$
7. $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m=\frac{b^m}{a^m}$
9. $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$
10. $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

Түбірлерге қолданылатын амалдар:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

2. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

3. $\left(\sqrt{a}\right)^m = \sqrt{a^m}$

4. $\sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$

5. $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$

6. $\sqrt{a^m} = \left(\sqrt{|a|}\right)^m$

7. $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}$

8. $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

9. $\dfrac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\dfrac{a}{b}}$

10. $(\sqrt[m]{a^n})^p = \sqrt[m]{a^{np}}$

11. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Теңдеулерді шешу

1. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуінің түбірлерінің формуласы $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. $x^2 + px + q = 0$ келтірілген квадрат теңдеуінің түбірлерінің формуласы

$x_{1,2} = -\dfrac{p}{2} \pm \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$

3. $ax^2 + bx + c = 0$ квадрат теңдеуі үшін Виет теоремасы $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$; $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$

4. $x^2 + px + q = 0$ келтірілген квадрат теңдеуі үшін Виет теоремасы

$x_1 + x_2 = -p; \quad x_1 \cdot x_2 = q$

5. Квадрат үшмүшелікті көбейткішке жіктеу $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

$x_1, x_2 - ax^2 + bx + c = 0$ теңдеуінің түбірлері

6. Квадрат үшмүшеліктен толық квадратты бөліп жазу

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Теңсіздіктер

- ***Теңсіздіктер қасиеті:***

1. Егер $a>b$ болса, онда $b<a$
2. Егер $a>b$ болса, онда $a+c>b+c$
3. Егер $a>b$ және $c>d$ болса, онда $a+c>b+d$
4. Егер $a>b$ және $c<d$ болса, онда $a-c>b-d$
5. Егер $a>b$ және $m>0$ болса, онда $am>bm$
6. Егер $a>b$ және $m<0$ болса, онда $am<bm$

- ***Санның абсолют шамасы (модуль):***

1. Егер $a \geq 0$ болса, онда $|a| = a$
2. Егер $a < 0$ болса, онда $|a| = -a$

- $ax > b$ ***сызықты теңсіздіктің шешімі***

1. Егер $a>0$ болса, онда $x > \dfrac{b}{a}$
2. Егер $a<0$ болса, онда $x < \dfrac{b}{a}$

- ***Квадрат теңсіздіктің шешімі***

Барлық жағдайда $a > 0$ $D = b^2 - 4ac$ болсын.

Қатаң	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c < 0$
$D > 0$	$x_1 < x_2 \quad x < x_1, \quad x > x_2$	$x_1 < x_2 \quad x_1 < x < x_2$
$D < 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$	$\varnothing$
$D = 0$	$x \neq x_1$	$\varnothing$

Қатаң емес	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
$D>0$	$x_1<x_2$ $x\leq x_1$, $x\geq x_2$	$x_1<x_2$ $x_1\leq x\leq x_2$
$D<0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	$\varnothing$
$D=0$	$x\in(-\infty;+\infty)$	$x=x_1$

Прогрессия

• ***Арифметикалық прогрессия***

1. n-ші мүшесінің формуласы $a_n=a_1+d(n-1)$
2. Алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы $S_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{[2a_1+d(n-1)]n}{2}$
3. Арифметикалық прогрессия қасиеттері:

Егер d>0 болса, онда прогрессия өспелі

Егер d<0 болса, онда прогрессия кемімелі

$a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$ $\quad d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$ $\quad (\mathrm{n}>\mathrm{m})$

• ***Геометриялық прогрессия***

1. n-ші мүшесінің формуласы $b_n=b_1q^{n-1}$
2. Алғашқы n мүшесінің қосындысының формуласы $S_n=\frac{b_nq-b_1}{q-1}=b_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$
3. Геометриялық прогрессия қасиеттері:

Егер q>1 болса, онда прогрессия өспелі

Егер $0<|q|<1$ болса, онда прогрессия кемімелі

Егер q<-1 болса, онда прогрессия таңба ауыспалы

$q^{n-m}=\frac{b_n}{b_m}$; $|b_n|=\sqrt{b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$

4. Шексіз геометриялық прогрессияның мүшелерінің қосындысы $S=\frac{b_1}{1-q}$ $\quad |q|<1$

Логарифмдер

• **Логарифм анықтамасы.** b санының a негізі бойынша лоарифмі деп a санының b-ға тең дәреже көрсеткішін айтады.

1. $\log_a N=x$ жазылуы $a^x=N$ жазылуымен бірмәнді, сондықтан $a^{\log_a N}=N$ тепе-теңдігін аламыз.
2. $\log_a a=1$;
3. $\log_a 1=0$;
4. $\log_a(N\cdot M)=\log_a N+\log_a M$;
5. $\log_a(\frac{N}{M})=\log_a N-\log_a M$;
6. $\log_a N^m=m\log_a N$;
7. $\log_{a^m} N=\frac{1}{m}\log_a N$;
8. $\log_a N=\frac{1}{\log_N a}$;
9. $\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}$;

Логарифмдерді салыстыру

Егер $0<a<1$ және $0<x_1<x_2$ болса, онда $\log_a x_1>\log_a x_2$ – теңсіздік таңбасы өзгереді.

Егер $a>1$ және $0<x_1<x_2$ болса, онда $\log_a x_1<\log_a x_2$ – теңсіздік таңбасы өзгермейді.

Егер $1 < a < b$ және $x > 1$ болса, онда $\log_a x > \log_b x > 0$.

Егер $0 < a < b < 1$ және $x > 1$ болса, онда $0 > \log_a x > \log_b x$.

Егер $1 < a < b$ және $0 < x < 1$ болса, онда $\log_a x < \log_b x < 0$.

Егер $0 < a < b < 1$ және $0 < x < 1$ болса, онда $0 < \log_a x < \log_b x$.

Логарифмдік теңдеулер.

1. Қарапайым логарифмдік теңдеу $\log_a x = b \quad a > 0 \quad a \neq 1$ түрде болады. х-тің қабылдайтын мәндер жиыны х>0 және оның шешімі $x = a^b$ түрде болады.
2. $\log_a f(x) = b \ (a > 0, \ a \neq 1)$ түрдегі логарифмдік теңдеудің х-тің қабылдайтын мәндер жиыны (анықталу облысы) $f(x) > 0$ теңсіздігінен анықталады. Теңдеу $f(x) = a^b$ теңдеуіне эквивалентті.
3. $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x) \quad (a > 0, \ a \neq 1)$ түрдегі логарифмдік теңдеудің х-тің қабылдайтын мәндер жиыны (анықталу облысы) $\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 0 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесімен анықталады. Теңдеу $f(x) = \varphi(x)$ теңдеуіне эквивалентті.

Көрсеткіштік теңдеулер.

1. Қарапайым көрсеткіштік теңдеу $a^x = b \quad a > 0; \ b > 0; \ a \neq 1$ түрде болады. Шешімі $x = \log_a b$.
2. $a^{f(x)} = b \quad a > 0; \ b > 0; \ a \neq 1$ түрдегі көрсеткіштік теңдеуді екі жағын а негізі бойынша логарифмдеу арқылы шешіледі. Нәтижесінде берілген теңдеуге эквивалентті $f(x) = a^b$ теңдеуін аламыз.
3. $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)} \quad a > 0; \quad a \neq 1$ түрдегі көрсеткіштік теңдеуді екі жағын а негізі бойынша логарифмдеу арқылы шешіледі. Нәтижесінде берілген теңдеуге эквивалентті $f(x) = \varphi(x)$ теңдеуін аламыз.

Логарифмдік теңсіздіктер.

Логарифмдік теңсіздіктерді шешу $y = \log_a x$ функциясы a>1 монотонды өспелі, 0<a<1 монотоды кемімелігіне негізделген.

$\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x) > 0 \\ a > 1 \\ f(x) > \varphi(x) \end{cases}$ $\begin{cases} \log_a f(x) > \log_a \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) < \varphi(x) \end{cases}$

Қарапайым логарифмдік теңсіздіктен теңбе-тең теңсіздіктер жүйесіне көшкенде алғашқы теңсіздіктің анықталу облысын ескеру керек.

Қарапайым логарифмдік теңсіздіктер:

1. $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b \\ a > 1 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \log_a f(x) > b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \log_a f(x) < b \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^b \\ a > 1 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \log_a f(x) < b \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^b \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

$\log_{\varphi(x)} f(x) > b$ түрдегі логарифмдік теңсіздік

$\begin{cases} f(x) > 0 \\ \varphi(x) > 1 \\ f(x) > (\varphi(x))^b \end{cases}$ және $\begin{cases} f(x) > 0 \\ 0 < \varphi(x) < 1 \\ f(x) < (\varphi(x))^b \end{cases}$ екі теңсіздіктер жүйесіне эквивалентті.

Көрсеткіштік теңсіздіктер.

Көрсеткіштік теңсіздіктерді шешу $y = a^x$ функциясы a>1 монотонды өспелі, 0<a<1 монотоды кемімелігіне негізделген.

$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ a > 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$

$a^{f(x)} \geq b \quad (a > 0 \quad a \neq 1 \quad b > 0)$ түрдегі теңсіздік екі жағын логарифмдеу арқылы шешіледі. Егер $b \leq 0$ болса, онда теңсіздік х–тің барлық қабылдайтын мәндері үшін орынды. $a^{f(x)} \leq b \quad b \leq 0 \quad (a > 0 \quad a \neq 1)$ болса шешімі болмайды.

Қарапайым көрсеткіштік теңсіздіктер:

1. $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ a > 1 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \log_a b \\ a > 1 \\ b > 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} a^{f(x)} > b \\ a > 1 \\ b < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\infty < f(x) < +\infty \\ a > 1 \\ b > 0 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} a^{f(x)} < b \\ a > 1 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < \log_a b \\ a > 1 \\ b > 0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} a^{f(x)} < b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \log_a b \\ 0 < a < 1 \\ b > 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} a^{f(x)} < b \\ a > 1 \\ b < 0 \end{cases}$ - теңсіздігінің шешімі жоқ.

Элементар функциялар

$y = f(x)$ функция, мұндағы x – тәуелсіз айнымалы, ал y – тәуелді айнымалы.

Тәуелсіз айнымалының қабылдайтын мәндер жиыны функцияның анықталу облысы деп аталады.

Тәуелді айнымалының қабылдайтын мәндер жиыны функцияның мәндер (өзгеру) облысы деп аталады.

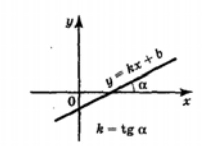
Егер $f(-x) = f(x)$ шарты орындалса, онда функция жұп деп аталады. Жұп функцияның графигі ордината (Ox) осіне қарағанда симметриялы болады.

Егер $f(-x) = -f(x)$ шарты орындалса, онда функция тақ деп аталады. Тақ функцияның графигі координата басына (нөлге) қарағанда симметриялы болады.

Егер $f(\varphi(x)) = x$ немесе $\varphi(f(x)) = x$ шарты орындалса, онда $f(x)$ және $\varphi(x)$ өзара кері функция деп аталады. Өзара кері функциялардың графиктері y=x түзуіне қарағанда симметриялы болады.

1. $y = kx + b$ сызықтық функция. Мұндағы k, b нақты сандар.

а) Графигі түзу сызық



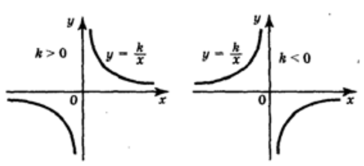
ә) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

2. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d} = \dfrac{k}{x-m} + n$ $k = \dfrac{bc-ad}{c^2}$ $m = -\dfrac{d}{c}$ $n = \dfrac{a}{c}$ a, b, c, d – нақты сандар.

а) Графигі гипербола

$y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0,\ x \neq 0)$



ә) Анықталу облысы $x \neq -\dfrac{d}{c}$

б) Мәндер облысы $y \neq n$

3. $y = ax^2 + bx + c = a(x-m)^2 + n$

мұндағы $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a} = -\dfrac{D}{4a}$ a, b, c нақты сандар

а) Графигі парабола

ә) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

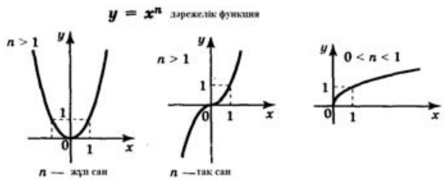
б) Мәндер облысы a>0 болса, $[n;+\infty)$ **a<0 болса,** $(-\infty;n]$**.**

4. $y = \sqrt{x}$

а) Графигі жарты парабола

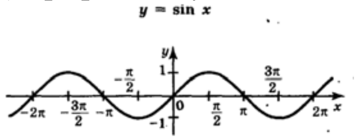
ә) Анықталу облысы $x \geq 0$ $[0;+\infty)$ –теріс емес нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $y \geq 0$ $[0;+\infty)$ –теріс емес нақты сандар жиыны.



5. $y = \sin x$

а) Графигі синусоида



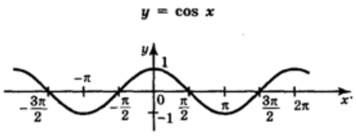
ә) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $[-1;\ 1]$

в) Периодты $T = 2\pi$ және тақ функция $\sin(-x) = -\sin x$

6. $y = \cos x$

а) Графигі косинусоида



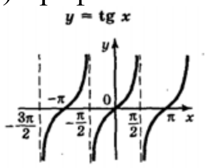
ә) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $[-1;\ 1]$

в) Периодты $T = 2\pi$ және жұп функция $\cos(-x) = \cos x$

7. $y = tgx$

а) Графигі тангенсоида



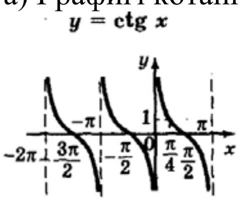
ә) Анықталу облысы $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$

б) Мәндер облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

в) Периодты $T = \pi$ және тақ функция $tg(-x) = -tgx$

8. $y = ctgx$

а) Графигі котангенсоида



ә) Анықталу облысы $x \neq \pi n, n \in Z$ $(\pi n; \pi + \pi n)$

б) Мәндер облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

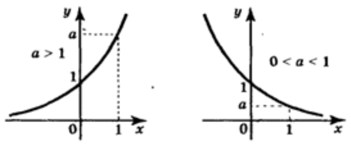
в) Периодты $T = \pi$

9. $y = a^x$ $a > 0$ $a \neq 1$

а) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $(0;+\infty)$ – бүкіл оң нақты сандар жиыны.

$y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$



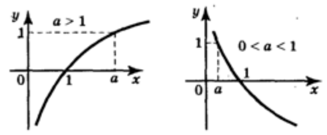
10. $y = \log_a x \quad a > 0 \quad a \neq 1$

а) Анықталу облысы $(0;+\infty)$ – бүкіл оң нақты сандар жиыны.

б) Мәндер облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

$y = \log_a x$

$(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$



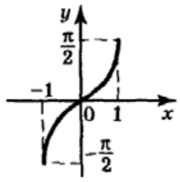
11. $y = \arcsin x$

а) Анықталу облысы $[-1;\ 1] \quad -1 \le x \le 1$

ә) Мәндер облысы $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

б) тақ функция $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

$y = \arcsin x$

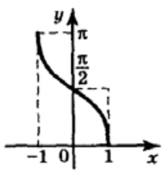


12. $y = \arccos x$

а) Анықталу облысы $[-1;\ 1] \quad -1 \le x \le 1$

ә) Мәндер облысы $(0;\pi)$

$y = \arccos x$



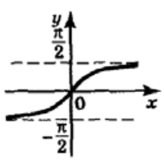
13. $y = arctgx$

а) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

ә) Мәндер облысы $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

б) тақ функция $arctg(-x) = -arctgx$

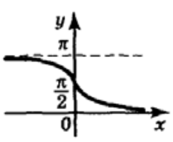
$y = \operatorname{arctg} x$



14. $y = arcctgx$

а) Анықталу облысы $(-\infty;+\infty)$ – бүкіл нақты сандар жиыны.

ә) Мәндер облысы $(0;\pi)$



Туындының негізгі қасиеттері және формулалары

1. Элементар функциялардың туындылары

$f(x)$	$x^{\alpha} \quad \alpha \in R$	a^x	e^x	$\log_a x$	$\ln x$
$f'(x)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$a^x \ln a$	e^x	$\frac{1}{x \ln a}$	$\frac{1}{x}$
$f(x)$	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$	
$f'(x)$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	

2. Дифференциалдау ережелері

$U(x), V(x)-$ кез келген функциялар және $C \in R$ саны үшін

$$C' = 0$$

$$(C \cdot U(x))' = C \cdot U'(x)$$

$$(U(x) \cdot V(x))' = U'(x) \cdot V(x) + U(x) \cdot V'(x)$$

$$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U'(x) \cdot V(x) - U(x) \cdot V'(x)}{V^2(x)} \quad \mathrm{V(x)} \neq 0$$

$$\left(\frac{C}{V(x)}\right)' = -\frac{C \cdot V'(x)}{V^2(x)} \quad \mathrm{V(x)} \neq 0$$

3. Күрделі функцияны дифференциалдау ережесі

Егер $f(u(x))-$ күрделі функция болса, онда $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

$f(x)$	$u^{\alpha} \quad \alpha \in R$	$\sqrt{u}$	a^u	e^u	$\log_a u$
$f'(x)$	$\alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$a^u \ln a$	$u' \cdot e^u$	$\frac{u'}{u \ln a}$
$f(x)$	$\ln u$	$\sin u$	$\cos u$	tgu	$ctgu$
$f'(x)$	$\frac{u'}{u}$	$u' \cdot \cos u$	$-u' \cdot \sin$	$\frac{u'}{\cos^2 u}$	$-\frac{u'}{\sin^2 u}$

4. Функцияның өсу және кему белгілері

Егер $f'(x) > 0 \quad x \in (a; b)$ болса, онда $(a; b)$ аралықта $f(x)$ функция өседі.

Егер $f'(x) < 0 \quad x \in (a; b)$ болса, онда $(a; b)$ аралықта $f(x)$ функция кемиді.

5.Функция экстремум нүктелері

Егер $(a; b)$ аралықта x_0 нүктесі табылып, $f(x) < f(x_0)$ шарты орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының максимум нүктесі деп аталады.

Егер $(a; b)$ аралықта x_0 нүктесі табылып, $f(x) > f(x_0)$ шарты орындалса, онда x_0 нүктесі $f(x)$ функциясының минимум нүктесі деп аталады.

Максимум және минимум нүктелері экстремум нүктелері деп атайды. Функцияның экстремум нүктелердегі мәні осы функцияның экстремумдары деп атайды.

6. Экстремумның қажетті шарты

Егер $f(x)$ функциясының x_0 экстремум нүктесі болып және осы нүктенің аймағында $f'(x) > 0$ туындысы бар болса, онда $f'(x) = 0$.

Функцияның туындысы нөлге тең немесе туындысы болмайтын анықталу облысының ішкі нүктелері сындық (кризистік) нүктелері деп аталады.

7. Жанаманың теңдеуі

Егер $f(x)$ функциясының x_0 нүктесіндегі туындысы табылса, онда осы нүктедегі жанаманың теңдеуі $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $\quad k = f'(x) = tg\alpha \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$

8. Лангранж формуласы $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad c \in (a; b \ )$

Алғашқы функция және интеграл

Егер берілген аралықтағы x үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса, онда $F(x)$ фукнкциясы $f(x)$ функциясының алғашқы функциясы деп аталады.

1. Кейбір функциялардың алғашқы функциялары

$f(x)$	$F(x)$

0	C
k	kx+C
$x^{\alpha} \quad (\alpha \neq -1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
$x^{-\frac{1}{2}}$	$2\sqrt{x}+C$
$a^x \quad (a>0,\ a\neq 1)$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$
e^x	e^x+C
sinx	-cosx+C
cosx	sinx+C
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$

2. Ньютон – Лейбниц формуласы $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$

3.

Тригонометриялық өрнектерді ықшамдау

<u>Бұрышты радианмен өрнектеу</u>

$\alpha = \frac{\pi \cdot a^0}{180^0} \qquad a^0 = \alpha - \frac{180^0}{\pi}$ (α - бұрыштың радиандық , a - градустық өлшемі)

<u>Тригонометриялық функциялардың мәндерінің таңбалары</u>

Ширек	**sinx**	**cosx**	**tgx**	**ctgx**
I	+	+	+	+
II	+	-	-	-
III	-	-	+	+
IV	-	+	-	-

<u>Кейбір бұрыштағы тригонометриялық функциялардың мәндері</u>

α	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

<u>Тригонометриялық функциялар арасындағы қатыстар</u>

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
2. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$
3. $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4. $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$
5. $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

6. $1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

Қосу формулалары:

1. $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$
3. $tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta}$

Қос және жарты бұрыштар:

1. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$
2. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$
3. $tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4. $ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}$
5. $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^2\alpha$
6. $\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$
7. $tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha}$
8. $ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$
9. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\quad 1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha$
10. $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\quad 1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha$
11. $tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
12. $ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$

Тригонометриялық түрлендірулер:

1. $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
2. $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$
3. $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$
4. $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$
5. $\cos\alpha+\sin\alpha=\sqrt{2}\cos(45^0-\alpha)$
6. $\cos\alpha-\sin\alpha=\sqrt{2}\sin(45^0-\alpha)$
7. $tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$
8. $ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\beta\pm\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$
9. $tg\alpha+ctg\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$
10. $tg\alpha-ctg\beta=-\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$
11. $tg\alpha+ctg\alpha=\frac{2}{\sin 2\alpha}$
12. $tg\alpha-ctg\alpha=-2ctg2\alpha$

Дәрежені төмендету формулалары

1. $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
2. $\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
3. $\cos^3\alpha = \frac{3\cos\alpha + \cos 3\alpha}{4}$
4. $\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}$
5. $\cos^4\alpha = \frac{3+4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$
6. $\sin^4\alpha = \frac{3-4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{8}$
7. $tg^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$
8. $ctg^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}$

<u>Кейбір қажетті қатыстар:</u>

1. $\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$
2. $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$
3. $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
4. $\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
5. $\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$
6. $tg\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}$
7. $\cos 4\alpha = \cos^4\alpha - 6\cos^2\alpha\sin^2\alpha + \sin^4\alpha$
8. $\sin 4\alpha = 4\cos^3\alpha\sin\alpha - 4\cos\alpha\sin^3\alpha$

Тригонометриялық теңдеулер

1. $\sin x = a \qquad x = (-1)^k \arcsin a + 2\pi k \qquad |a| \le 1,\ k \in Z$
2. $\cos x = a \qquad x = \pm\arccos a + 2\pi k \qquad |a| \le 1,\ k \in Z$
3. $tgx = a \qquad x = arctga + \pi k \qquad k \in Z$
4. $ctgx = a \qquad x = arcctga + \pi k \qquad k \in Z$
5. $\sin x = 0 \qquad x = \pi k \qquad k \in Z$

   $\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad k \in Z$

   $tgx = 0 \qquad x = \pi k \qquad k \in Z$

   $ctgx = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi k \qquad k \in Z$
6. $\sin x = 1 \qquad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad k \in Z$

   $\cos x = 1 \qquad x = 2\pi k \qquad k \in Z$

   $tgx = 1 \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \qquad k \in Z$

   $ctgx = 1 \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k \qquad k \in Z$
7. $\sin x = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad k \in Z$

   $\cos x = -1 \qquad x = \pi + 2\pi k \qquad k \in Z$

8. $\arcsin a = \arccos\sqrt{1-a^2} = arctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

9. $\arccos a = \arcsin\sqrt{1-a^2} = arcctg\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

10. $arctga = arcctg\frac{1}{a} = \arcsin\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$

11. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$

12. $arctga + arcstga = \frac{\pi}{2}$