VII ТАРАУ

Сызықтық кеңістіктегі сызықтық операторлар

Бұл тарауда *сызықтық операторлар* деп аталатын сызықтық кеңістіктердің бейнелеулері зерттеледі. Сызықтық операторлар мен матрицалардың арасында, бір жағынан сызықтық операторлар теориясының көмегімен матрицалардың қасиеттерін зерттеуге, екінші жағынан сызықтық операторларға жасалатын амалдарды матрицалық түрге келтіріп жүргізуге мүмкіндігін беретін, екі жақты байланыс анықталады.

§82. Сызықтық оператор ұғымы

Қандай да бір берілеген X және Y жиындары арасындағы бір мәнді сәйкестіктер үшін неше түрлі атаулар пайдаланылады. Олардың арасында "бейнелеу" атауы жиі кездесетіндердің бірі. Бейнелеулердің кейбір маңызды дербес түрлерін ажырату мақсатымен басқа да атаулар қолданылады. Мысалы, "функция" деген атау, әдетте, X пен Y сандар жиыны, ал "түрлендіру" X пен Y кез келген бірақ бірдей жиындары болғанда пайдаланылады. Сондай-ақ, X пен Y екуі де қандай да бір ортақ P өрісі бойынша сызықтық кеңістік болғанда, "бейнелеу" терминнің орнына "оператор" терминін жиі кездестіруге болады. Ал операторлар арасында сызықтық операторлар терең зерттелген және ең көп қолданылады.

82.1-анықтама: X және Y қандай да бір P өрісі бойынша екі сызықтық кеңістік болсын. Кез келген $\alpha, \beta \in P$ коэффициенттері және кез келген $a, b \in X$ векторлары үшін

$$\mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \alpha \mathcal{A} a + \beta \mathcal{A} b \qquad (82.1)$$

теңдігі орындалса, онда $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ бейнелеуі *сызықтық оператор* деп аталады. Ал (82.1)-теңдіктегі $\mathcal{A}$ операторының қасиетін *сызықтық қасиет* деп атаймыз.

• $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторы үшін X сызықтық кеңістігін *бейнеленетін кеңістік*, ал $x \in X$ векторының Y кеңістігіндегі $\mathcal{A}x$ мәнін x векторының *бейнесі* деп атаймыз.

Егер X және Y кеңістіктері бірдей болса, "сызықтық оператор" атауының орнына X кеңістігіннің "сызықтық түрлендіруі" деген атау жиі қолданылады. Егер P сандар өрісі, ал $Y = P$ болса, онда "сызықтық оператор" терминнің орнына "сызықтық функционал" термині қолданылады.

Сызықтық операторларды белгілеу үшін біз латын алфавитының жазба бас әріптерін пайдаланамыз.

Сызықтық оператордың анықтамасындағы (82.1)-теңдік:

$$\mathcal{A}(a + b) = \mathcal{A}a + \mathcal{A}b, \tag{82.2}$$

және

$$\mathcal{A}(\alpha a) = \alpha \mathcal{A}a. \tag{82.3}$$

екі теңдікке пара-пар. (82.2)-теңдік $\mathcal{A}$ операторының *аддитивтік қасиеті*, ал бұл қасиеті бар оператор *аддитив оператор* деп аталады. Сондай-ақ, (82.3)-теңдік *біртектілік қасиеті*, ал бұл қасиеті бар оператор *біртекті оператор* деп аталады. Сонымен, басқаша айтқанда, сызықтық оператор дегеніміз әрі аддитив әрі біртекті оператор болып табылады.

Сызықтық операторлардың қарапайым қасиеттері

(82.1)-формуладан

$$\mathcal{A}(\theta_X) = \theta_Y \tag{82.4}$$

теңдігі және кез келген $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in P$, $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$ үшін

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k) = \\ = \alpha_1 \mathcal{A}a_1 + \alpha_2 \mathcal{A}a_2 + \dots + \alpha_k \mathcal{A}a_k\end{aligned} \tag{82.5}$$

немесе қысқаша түрде

$$\mathcal{A}\Big(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i\Big) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{A}a_i \tag{82.6}$$

теңдігі орындалатындығы оңай шығады.

(82.4)-теңдіктен сызықтық оператордың нөлдік вектордың бейнесі нөлдік вектор болатынын, ал (82.5)-теңдіктен сызықтық оператордың сызықтық өрнектерді сақтайтынын көреміз. Осы екі теңдіктен: *сызықтық оператор сызықтық тәуелді векторлар жүйесін сызықтық тәуелді векторлар жүйесіне көшіреді* деген салдар шығады. Яғни, егер X сызықтық кеңістігінің $a_1, a_2, \dots, a_k$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болса, онда олардың $\mathcal{A}a_1$, $\mathcal{A}a_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}a_k$ бейнелері Y кеңістігінің сызықтық тәуелді вектор жүйесін құрайды. Ал сызықтық тәуелсіздікті сызықтық оператор сақтамау да мүмкін.

Сызықтық операторлардың мысалдары

Кез келген сызықтық кеңістіктің ең қарапайым сызықтық түрлендірулерін төмендегі мысалдан көруге болады.

82.1-мысал. Әрбір $x \in X$ үшін $(\lambda\mathcal{E})x = \lambda x$ теңдігімен анықталған $\lambda\mathcal{E} : X \mapsto X$ бейнелеуі сызықтық түрлендіру болады. Мұндағы $\langle X, P\rangle$ қандай да бір сызықтық кеңістік, ал $\lambda \in P$ кез келген коэффициент. Шынында,

$$(\lambda\mathcal{E})(\alpha a + \beta b) = \lambda(\alpha a + \beta b) = \\ = \alpha(\lambda a) + \beta(\lambda b) = \alpha(\lambda\mathcal{E})a + \beta(\lambda\mathcal{E})b.$$

$\lambda\mathcal{E}$ сызықтық түрлендіруі *скаляр оператор* деп аталады. Бұл скаляр оператордың геометриялық мағынасы – әр векторды λ рет созу. $\lambda = 1$ болғанда $\mathcal{E}$ *теңбе-тең операторын*, ал $\lambda = 0$ болғанда $\mathcal{O}$ *нөлдік операторын* аламыз. Нөлдік оператор әрбір x векторын θ нөлдік векторына көшіреді.

Кез келген $x \in X$ векторын Y сызықтық кеңістігінің θ_Y нөлдік векторына көшіретін, яғни $\mathcal{O}x = \theta_Y$ теңдігі орындалатын бейнелеуді де нөлдік оператор деп атаймыз.

Біз осы оқулықта сызықтық операторларды бірнеше рет кездестірдік.

82.2-мысал. $\Phi_\varphi : \Pi \mapsto \Pi$ бейнелеуі Π жазықтығын полюс айналасында φ бұрышына бұру болсын. Онда (82.2)-теңдік, егер a,b радиус-векторларына құрылған параллелограмның диагоналын φ бұрышына бұрсақ, онда a мен b векторларынан φ бұрышына бұру арқылы алынған $\Phi_\varphi a$, $\Phi_\varphi b$ радиус-векторларына құрылған параллелограмның диагоналын алатындығымызды білдіреді. (82.3)-теңдік a радиус-векторын α рет ұзартып, φ бұрышына бұрсақ, онда бұл алдымен a–ны φ бұрышына бұрып, соңынан пайда болған векторды α рет ұзартқанмен бірдей болатынын білдіреді. Сонымен Φ_φ бейнелеуі Π жазықтығының сызықтық түрлендіруі болады.

82.3-мысал. a мен b қандай да бір берілген бағытталған кесінділер болсын. Онда кез келген $x \in S$ бағытталған кесіндісі үшін $\mathcal{A}x = (x, a)$ және $\mathcal{B}x = [x, b]$ ережелер бойынша анықталған $\mathcal{A}$:

$S \mapsto R$ мен $\mathcal{B} : S \mapsto S$ бейнелеулері сызықтық операторлар болады. Бұл скаляр және векторлық көбейтінділердің бірінші аргументі бойынша сызықтық қасиеттерінен шығады. $\mathcal{A}$ операторы сызықтық функционалдың мысалын береді.

82.1-ескерту. Аналитикалық геометрияда екі түрлі объект, атап айтқанда, нүктелер мен векторлар бізге ең көп ұшырасады. Бұру, параллель көшіру, гомотетия, симметрия, проекция сияқты геометриялық түрлендірулер нүктелерге жасалады. Әдеттегі келісім бойынша, нүктелердің орнына олардың радиус-векторлары қарастырылады. Осы келісімді біз жоғардағы 82.2-мысалда қолдандық, ал 82.3-мысалда түрлендірулер нүктелерге емес, векторларға жасалған. Ескертетініміз мынау: геометриялық түрлендірулерге кездескенде, олар екі түрлі болуын есте сақтау керек. Бұның қажеттігін параллель тасымалдау түрлендіруі арқылы айқындап берейік.

Параллель тасымалдауды нүктелер түрлендіруі деп қарастырып, оны $\mathcal{K}_1$ арқылы белгілейік. Онда $\mathcal{K}_1$ сызықтық оператор болмайтыны айқын. Шынында да, кеңістіктің әрбір M нүктесі, айталық, a векторына параллель тасымалдансын. Онда бұл түрлендіру $\mathcal{K}_1(OM) = OM + a$ теңдігімен анықталады. Мұндағы O нүктесі кеңістікте белгіленген қандай да бір полюс, ал OM бағытталған кесіндісі M нүктесінің радиус-векторы. Егер $a \neq \theta$ болса, онда $\mathcal{K}_1(2 \cdot OM) = 2 \cdot OM + a$, ал $2 \cdot \mathcal{K}_1(OM) = 2 \cdot OM + 2 \cdot a$. Демек, $\mathcal{K}_1$ түрлендіруі біртекті оператор бола алмайды.

Енді параллель тасымалдауды векторлар түрлендіруі деп қарастырып, оны $\mathcal{K}_2$ арқылы белгілейік. Кез келген AB бағытталған кесіндісі үшін

$$\mathcal{K}_2(AB) = \mathcal{K}_1(OB) - \mathcal{K}_1(OA) = OB - OA = AB.$$

Ендеше, $\mathcal{K}_2$ теңбе-тең сызықтық операторы болып шықты.

82.4-мысал. Егер $\varphi : X \mapsto Y$ биекциясы X пен Y сызықтық кеңістіктерінің изоморфизмі болса, онда φ сызықтық оператор болатыны изоморфизм анықтамасынан бірден көрінеді.

82.5-мысал. X Евклид не унитар кеңістік, ал L оның қандай да бір ішкеңістігі болсын. Онда ортогональ проекциялаудың сызықтық қасиеті бойынша, барлық $x \in X$ үшін $\mathcal{P}x = pr_L x$ теңдігімен анықталған $\mathcal{P} : X \mapsto X$ бейнелеуі сызықтық түрлендіру болады.

82.6-мысал. P қандай да бір өріс, ал $A \in \mathcal{M}_{k \times n}(P)$ кез келген матрица болсын. Онда кез келген $a \in P^n$ бағаны үшін оның $\mathcal{A}a$

бейнесі $\mathcal{A}a = A \cdot a$ ережесімен анықталған $\mathcal{A} : P^n \mapsto P^k$ бейнелеуі сызықтық оператор болады. Бұл матрицалардың көбейту амалының қасиеттерінен оңай шығады. Осы мысалға ерекше назар аудару керек. Себебі оның қолданулары өте көп.

82.7-мысал. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ операторларына қатысты x бағытталған кесіндісінің $\mathcal{A}x$ және $\mathcal{B}x$ бейнелері $\mathcal{A}x = (x, x)$ және $\mathcal{B}x = [x, x]$ ережелерімен анықталсын. Онда $\mathcal{A}$ операторы сызықтық емес, ал $\mathcal{B}$ сызықтық оператор болады. Себебі, кез келген $x \neq \theta$ үшін $\mathcal{A}(2 \cdot x) \neq 2 \cdot \mathcal{A}x$, ал $\mathcal{B}x = \theta$.

Сызықтық операторлар математиканың алгебра мен геометриядан өзге салаларында да жиі кездеседі. Келесі екі мысал математикалық талдау пәнінен алынған.

82.8-мысал. Кәдімгі функцияларды $\mathcal{D}f = f'$ дифференциалдау ережесімен анықталған

$$\mathcal{D} : C'_{(-\infty,+\infty)} \mapsto C_{(-\infty,+\infty)}$$

бейнелеуі сызықтық оператор болады. Әдетте, алгебрада дифференциалдау операторы $C'_{(-\infty,+\infty)}$ нақты сызықтық кеңістігінің көпмүшелер ішкі кеңістіктерінде ғана қарастырылады:

$$\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X] \text{ немесе } \mathcal{D} : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_{n-1}[X].$$

82.9-мысал. Кез келген үзіліссіз f функциясы үшін

$$\mathcal{J}f = \int_a^b f(x)dx$$

ережесімен анықталған интегралдау $\mathcal{J} : C_{[a,b]} \mapsto R$ операторы сызықтық функционал болады.

Бақылау сұрақтары

82.1-сұрақ. Центрлік симметрия кеңістіктің сызықтық түрлендіруі болатынын көрсету керек.

82.2-сұрақ. Жазықтықтың өстік симметриясы оның сызықтық түрлендіруі бола ма?

82.3-сұрақ. Инверсия жазықтықтың сызықтық түрлендіруі бола ма?

82.4-сұрақ. Гомотетия кеңістіктің сызықтық түрлендіруі бола ма?

82.5-сұрақ. Сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін сызықтық тәуелді жүйеге көшіретін сызықтық операторлардың бірнеше мысалдарын келтіру керек.

82.6-сұрақ. Аддитив емес, біртекті оператордың мысалын тап.

82.7-сұрақ. Біртекті емес, аддитив оператордың мысалын тап.

§83. Сызықтық оператордың матрицалары

Матрицалар мен сызықтық операторлардың арасындағы тығыз байланыстық төмендегі теореманың салдары болады.

83.1-теорема: *Ақырлы өлшемді сызықтық кеңістікті бейнелейтін сызықтық оператор базистік векторлардың бейнелерімен толық анықталады.*

Дәлелдеу. Алдымен теореманың тұжырымын дәлірек анықтайық. P өрісі бойынша X пен Y сызықтық кеңістіктері берілсін. Осы екі сызықтық кеңістіктің біріншісі, яғни X кеңістігі, ақырлы өлшемді, ал $e_1, e_2, \ldots, e_n$ векторлар жүйесі оның базисі болсын. Y кеңістігінде қандай да бір y_1, y_2, $\ldots$, y_n векторлар жүйесін белгілейік. Онда теореманың тұжырымының түсінігі мынау: $\mathcal{A}e_1 = y_1$, $\mathcal{A}e_2 = y_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}e_n = y_n$ болатындай $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторы бірегей табылады.

$\mathcal{A}$ сызықтық операторының бар болуы. Кез келген $a \in X$ векторын алып, оның e_1, e_2, $\ldots$, e_n базисі бойынша $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ жіктеуін тауып, $\mathcal{A}a$ бейнесін $\mathcal{A}a = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n$ теңдігімен анықтаймыз. $\mathcal{A}$ бейнелеуінің сызықтық оператор болатынын көрсетейік. $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n$ векторы X кеңістігінің кез келген векторы, ал $\gamma, \delta \in P$ кез келген коэффициенттер болсын. Онда

$$\gamma a + \delta b = (\gamma\alpha_1 + \delta\beta_1)e_1 + \\ + (\gamma\alpha_2 + \delta\beta_2)e_2 + \cdots + (\gamma\alpha_n + \delta\beta_n)e_n.$$

Осыдан

$$\mathcal{A}(\gamma a + \delta b) = \sum_{i=1}^{n}(\gamma\alpha_i + \delta\beta_i)y_i = \\ = \gamma\sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i + \delta\sum_{i=1}^{n}\beta_i y_i = \gamma\mathcal{A}a + \delta\mathcal{A}b.$$

Демек, $\mathcal{A}$ бейнелеуі сызықтық оператор болады.

$\mathcal{A}$ операторының бірегейлігі. $\mathcal{B}e_1 = y_1$, $\mathcal{B}e_2 = y_2$, $\dots$, $\mathcal{B}e_n = y_n$ теңдіктері орындалатын $\mathcal{B} : X \mapsto Y$ қандай да бір сызықтық оператор болсын. Онда кез келген $a \in X$ үшін

$$\mathcal{B}a = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{B}e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \mathcal{A}a.$$

Демек, $\mathcal{A}$ мен $\mathcal{B}$ бейнелеулері тең. Теорема дәлелденді.

83.2-анықтама: P өрісі бойынша X және Y ақырлы өлшемді сызықтық кеңістіктерінің сәйкесінше $e_1, e_2, \dots, e_n$ және $q_1, q_2, \dots, q_k$ базистері берілсін, ал $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық оператор болсын. Бағандары $e_1, e_2, \dots, e_n$ базистік векторларының $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \dots, \mathcal{A}e_n$ бейнелерінің q_1, q_2, $\dots$, q_k базисіндегі координаталардан құралған A_{qe} матрицасын $\mathcal{A}$ *операторының* $e_1, e_2, \dots, e_n$ *және* $q_1, q_2, \dots, q_k$ *базистер жұбындағы матрицасы* деп атаймыз.

83.1-теорема бойынша, сызықтық оператордың матрицасы берілген базистер жұбында бірегей анықталады. Оны құрастыру үшін алдымен $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис векторларының $\mathcal{A}e_1$, $\mathcal{A}e_2$,$\dots$, $\mathcal{A}e_n$ бейнелерін тауып алын, оларды $q_1, q_2, \dots, q_k$ базисі бойынша жіктейміз:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{A}e_1 = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{21}q_2 + \dots + \alpha_{k1}q_k,\\
&\mathcal{A}e_2 = \alpha_{12}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \dots + \alpha_{k2}q_k,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\mathcal{A}e_n = \alpha_{1n}q_1 + \alpha_{2n}q_2 + \dots + \alpha_{kn}q_k.
\end{aligned}$$

Содан кейін бірінші жіктеудегі коэффициенттерді A_{qe} матрицасының бірінші бағанына орналастырамыз. Келесі де, екінші жіктеудегі коэффициенттерді екінші бағанға қоямыз. Осы жолмен жалғастыра отырып, соңғы жіктеудегі коэффициенттерді A_{qe} матрицасының соңғы бағанына орналастырамыз. Осыдан шыққан

$$A_{qe} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$$

матрицасы $\mathcal{A}$ операторының $e_1, e_2, \dots, e_n$ және q_1, q_2, $\dots$, q_k базистер жұбындағы матрицасы болады.

Әрине, $A_{qe} \in \mathcal{M}_{k\times n}(P)$. Сызықтық оператордың матрицасын оператордың өзі белгіленген әріппен белгілейміз де, бірақ операторларды латын алфавитының жазбаша, ал матрицаларды баспа бас әріптерімен белгілеу ережесін қадағалаймыз.

X пен Y сызықтық кеңістіктері бірдей болғанда, әдетте, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистері де бірдей алынады. Бұл жағдайда оператордың A_{ee} матрицасы шаршы матрица болады да A_e арқылы белгіленеді. Әлбетте, A_e матрицасының реті $\dim X$ өлшемділігіне тең болады. X және Y кеңістіктерінің қай базистері қарастырылғандығы анық болса, онда матрицасының белгілеуінде төменгі индекстерді жазбауымыз да мүмкін.

83.1-мысал. $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ векторлар жұбы Π бағытталған кесінділер жазықтығының оң базисі болсын. Осы базисте 82.2-мысалдағы Π жазықтығын полюс айналасында φ бұрышына бұру Φ_φ түрлендіруінің матрицасын табайық. Π жазықтығында $\Phi_\varphi \mathbf{i}$ және $\Phi_\varphi \mathbf{j}$ векторларын кескіндеп, $\Phi_\varphi \mathbf{i} = \cos\varphi \cdot \mathbf{i} + \sin\varphi \cdot \mathbf{j}$ және $\Phi_\varphi \mathbf{j} = -\sin\varphi \cdot \mathbf{i} + \cos\varphi \cdot \mathbf{j}$ теңдіктеріне келеміз. Осыдан Φ_φ бұру түрлендіруінің матрицасын аламыз:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

83.2-мысал. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ векторлар үштігі S бағытталған кесінділер кеңістігінің оң базисі, ал a кез келген векторы болсын. 82.3-мысалдағы $\mathcal{B}x = [x, b]$ ережесімен анықталған сызықтық түрлендіруінің $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ базисіндегі матрицасын табайық.

b векторының осы базистегі координаталары $(\alpha, \beta, \gamma)'$ болсын. Онда

$$\mathcal{B}\mathbf{i} = [\mathbf{i}, \alpha\mathbf{i} + \beta\mathbf{j} + \gamma\mathbf{k}] = \alpha[\mathbf{i}, \mathbf{i}] + \beta[\mathbf{i}, \mathbf{j}] + \gamma[\mathbf{i}, \mathbf{k}] = 0 \cdot \mathbf{i} - \gamma \cdot \mathbf{j} + \beta \cdot \mathbf{k}.$$

Осыған ұқсас, $\mathcal{B}\mathbf{j} = \gamma \cdot \mathbf{i} + 0 \cdot \mathbf{j} - \alpha \cdot \mathbf{k}$, $\mathcal{B}\mathbf{k} = -\beta \cdot \mathbf{i} + \alpha \cdot \mathbf{j} + 0 \cdot \mathbf{k}$. Демек, $\mathcal{B}$ операторының матрицасы $B = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & -\beta \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \beta & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$ болады.

83.3-мысал. Егер $\mathcal{A}$ операторы 82.6-мысалдағы сызықтық оператор, ал e мен q сәйкесінше P^n мен P^k сызықтық кеңістіктерінің қарапайым базистері болса, онда $A_{qe} = A$ болатынын жаттығу ретінде көрсетіңіз.

Сызықтық оператор мәндерін есептеу формуласы

83.3-мысалдың маңызы өте зор. Біріншіден, бұл мысал матрицаларды арифметикалық кеңістіктердің сызықтық операторлары немесе олардың сызықтық түрлендірулері деп қарастыруға мүмкіндік береді. Екіншіден, осы дербес жағдайда оператордың мәндерін есептеу өте қолайлы ереже бойынша жасалады: вектордың бейнесін табу үшін оның қарапайым базистегі координаталар бағанын матрицаға көбейте салу керек. Осы дербес жағдай жалпы жағдайдың ұйытқысы болғаны анық. Мұны келесі теоремадан көруге болады.

83.3-теорема: *A_{qe} матрицасы $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторының e_1, e_2,...,e_n және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистер жұбындағы матрицасы болсын. Онда кез келген $x \in X$ векторы үшін оның $y = \mathcal{A}x$ бейнесінің y_q координаталар бағаны*

$$y_q = A_{qe} \cdot x_e \tag{83.1}$$

формуласы арқылы есептеледі. Мұндағы x_e, әдеттегідей, x векторының координаталар бағаны.

Дәлелдеу. x және y векторларын e_1, e_2,...,e_n және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистер бойынша жіктейік:

$$x = \sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j, \quad y = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i q_i.$$

Онда

$$y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathcal{A} e_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} q_i\right) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij} \beta_j q_i = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j\right) q_i.$$

y векторының $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базисі бойынша жіктеуі бірегей болғандықтан

$$\gamma_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} \beta_j,\ \gamma_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} \beta_j, \ldots, \gamma_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} \beta_j$$

теңдіктерін аламыз. Ал осы k теңдік жалғыз (83.1)-матрицалық теңдікке пара-пар. Теорема дәлелденді.

83.3.1-салдар: *Егер y векторының y_q координаталар бағаны берілген болса, онда $\mathcal{A}x = y$ теңдігін қанағаттандыратын x векторының x_e координаталар бағаны $A_{q,e}x_e = y_q$ алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесінің шешімі болып табылады.*

Сызықтық оператор матрицасын түрлендіру формулалары

X және Y ортақ P өрісі бойынша сызықтық кеңістіктер, ал олардың өлшемдіктері сәйкесінше n мен k болсын. X кеңістігінде екі $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ және $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, ал Y кеңістігінде де екі $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ және $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ базисі берілсін. P_{ea} мен P_{qb} арқылы e базисінен a базисіне және сәйкесінше q базисінен b базисіне көшу матрицаларын белгілейік.

83.4-теорема: *$\mathcal{A} : X \mapsto Y$ қандай да бір берілген сызықтық операторының $A_{q,e}$ және $A_{b,a}$ матрицалары:*

$$A_{ba} = P_{bq} \cdot A_{qe} \cdot P_{ea} \tag{83.2}$$

немесе басқа эквивалент түрде

$$A_{ba} = P_{qb}^{-1} \cdot A_{qe} \cdot P_{ea} \tag{83.3}$$

қатысымен байланысқан.

Дәлелдеу. X сызықтық кеңістігінде кез келген x векторын белгілеп, оның $\mathcal{A}x \in Y$ бейнесін y арқылы белгілейік. $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ және $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ базистерінде x векторының координаталары

$$x_e = P_{ea} \cdot x_a,$$

ал $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$ және $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ базистерінде y векторының координаталары

$$y_q = P_{qb} \cdot y_b$$

формуларымен байланысқан. Бұл теңдіктерден және 83.3-теоремадан

$$y_q = P_{qb} \cdot y_b = P_{qb} \cdot (A_{ba} \cdot x_a) \text{ және } y_q = A_{q,e} \cdot x_e = A_{q,e} \cdot (P_{ea} \cdot x_a)$$

екі теңдік шығады. Осыдан

$$P_{qb} \cdot (A_{ba} \cdot x_a) = A_{q,e} \cdot (P_{ea} \cdot x_a), \text{ немесе}$$
$$(P_{qb} \cdot A_{ba}) \cdot x_a = (A_{q,e} \cdot P_{ea}) \cdot x_a.$$

x векторын X сызықтық кеңістігінде өзгертіп $P_{qb} \cdot A_{ba} = A_{q,e} \cdot P_{ea}$ матрицалық теңдігін аламыз. Шынында да, $x = a_1$ деп алсақ, онда $x_a = (1, 0, 0, \ldots, 0)'$. Ендеше $(P_{qb} \cdot A_{ba}) \cdot x_a = (A_{q,e} \cdot P_{ea}) \cdot x_a$ теңдігінен $P_{qb} \cdot A_{ba}$ және $A_{q,e} \cdot P_{ea}$ матрицаларының бірінші бағандарының теңдігі шығады. $x = a_2$ деп алғанда $x_a = (0, 1, 0, \ldots, 0)'$, демек, $P_{qb} \cdot A_{ba}$ және $A_{q,e} \cdot P_{ea}$ матрицаларының екінші бағандары да тең. Осы жолды жалғастыра отырып, $P_{qb} \cdot A_{ba}$ мен $A_{q,e} \cdot P_{ea}$ сәйкес бағандарының барлығы өзара тең болатынын көрсетеміз. Енді (83.3)-формула $P_{qb}^{-1} = P_{bq}$ теңдігінен артынша шығады. Теорема дәлелденді.

$X = Y, q = e, b = a$ болған дербес жағдайда, келесі тұжырымға тап боламыз.

83.4.1-салдар: $A_a = P_{ea}^{-1} A_e P_{ea}$ *немесе басқа эквивалент түрде* $A_a = P_{ae} A_e P_{ea}$.

Бақылау сұрақтары

83.1-сұрақ. Скаляр түрлендірудің қандайда бір базистегі матрицасын табу керек.

83.2-сұрақ. 82.2-мысалдағы бұру түрлендірудің матрицасы теріс Декарт базисінде қандай болады?

83.3-сұрақ. 83.2-мысалдағы $\mathcal{B}$ операторының матрицасы теріс Декарт базисінде қандай болады?

83.4-сұрақ. $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_{n-1}[X]$ дифференциалдау операторының $\mathbb{R}_n[X]$, $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ көпмүшелер кеңістіктерінің қарапайым базистер жұбындағы матрицасын табу керек.

83.5-сұрақ. 82.6-мысалдағы $\mathcal{A}$ операторының e және q сәйкесінше P^n мен P^k сызықтық кеңістіктерінің қарапайым базистер жұбындағы матрицасын табу керек.

83.6-сұрақ. $\mathcal{A} : X \mapsto X$ қандай да бір сызықтық түрлендіру, ал e_1, e_2, $\ldots$, e_{n-1}, e_n векторлар жүйесі X кеңістігінің кез келген базисі болсын. Базистік векторлардың ретін: e_n, e_{n-1}, $\ldots$, e_2, e_1 қарама-қарсыға өзгерткенде $\mathcal{A}$ операторынын матрицасы қалай өзгереді?

83.7-сұрақ. $\mathcal{A} : X \mapsto X$ қандай да бір сызықтық түрлендіру, ал e_1, e_2, $\ldots$, e_{n-1}, e_n векторлар жүйесі X кеңістігінің кез келген базисі болсын. Базистік векторлардың бірін нөлдік емес коэффициентке көбейткенде $\mathcal{A}$ операторынын матрицасы қалай өзгереді?

§84. Эквивалент және ұқсас матрицалар

84.1-анықтама: Тік бұрышты $A, B \in \mathcal{M}_{k\times n}(P)$ екі матрица үшін ерекше емес $C \in \mathcal{M}_k(P)$ және $D \in \mathcal{M}_n(P)$ шаршы матрицалар табылып, $B = C \cdot A \cdot D$ теңдігі орындалатын болса, онда A мен B *эквивалент матрицалар* деп аталады да $A \sim B$ арқылы белгіленеді.

84.2-анықтама: Шаршы $A, B \in \mathcal{M}_n(P)$ матрицалары үшін ерекше емес $C \in \mathcal{M}_n(P)$ матрицасы табылып $B = C^{-1} \cdot A \cdot C$ теңдігі орындалатын болса, онда A мен B *ұқсас матрицалар* деп аталады да $A \approx B$ арқылы белгіленеді.

Матрицалардың $\sim$ эквиваленттік және $\approx$ ұқсастық қатыстарының рефлексив, симметриялы және транзитив болатынын көрсету қиын емес. Сондықтан $\mathcal{M}_{k\times n}(P)$ және $\mathcal{M}_n(P)$ матрицалар жиындары өзара эквивалент және сәйкесінше өзара ұқсас матрицалардың қиылыспайтын кластарына бөліктенеді. Матрицалардың эквиваленттік пен ұқсастық белгілерін табу матрицалар теориясының негізгі есептерінің бірі болып табылады.

Матрицалардың эквиваленттігі үшін ішкі, яғни матрицаларға тікелей қатысты түріндегі белгілерді табу қиын емес. Олар келесі теоремада беріледі.

84.3-теорема: *$A, B \in \mathcal{M}_{k\times n}(P)$ кез келген матрицалар болсын. Онда келесі үш тұжырым пара-пар:*
(i) $A \sim B$,
(ii) $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B)$,
(iii) B матрицасы A матрицасынан оның жолдарына және бағандарына жасалған қарапайым түрлендірулер тізбегі арқылы алынады .

Дәлелдеу. $(i) \Rightarrow (ii)$. $A \sim B$ болсын. Онда ерекше емес C және D матрицалары табылып $B = C \cdot A \cdot D$ болады. Матрицалардың көбейтінділерінің рангі туралы теорема бойынша, матрицаны ерекше емес матрицаға көбейткенде одан ранг өзгермейді. Ендеше, $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(A)$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(B) = r$ болсын. Алдымен, A матрицасының жолдарына қарапайым түрлендірулер жасап, оны сатылы түрдегі F матрицасына келтіріп алайық. Соңынан, F матрицасының бағандарына қарапайым түрлендірулер жасап, оны бас диагоналы бойында P өрісінің r бірлік элементі, ал қалған орындарында нөлдік элементі тұратын J матрицасына келтіру оңай. Осыған ұқсас, B матрицасын да қарапайым түрлендірулермен J матрицасына келтіруге болады. Қарапайым түрлендірулер кері айналымды, ендеше J матрицасын кері қарапайым түрлендірулермен B матрицасына келтіруге болады. Демек, бірнеше қарапайым түрлендіру жасап A матрицасынан B матрицасын алуға болады.

$(iii) \Rightarrow (i)$. B матрицасы A матрицасынан оның жолдарына және бағандарына біртіндеп жасалған қарапайым түрлендірулер арқылы алынсын. A матрицасының жолдарына жасалған қарапайым түрлендірулердің матрицалары $C_1, C_2, \ldots, C_m$, ал бағандарына жасалған қарапайым түрлендірулер матрицалары D_1, $D_2, \ldots$, D_s болса, онда $B = C_m \cdot C_{m-1} \cdots C_2 \cdot C_1 \cdot A \cdot D_1 \cdot D_2 \cdots D_{s-1} \cdot D_s$. Қарапайым түрлендіру матрицалардың әр қайсысы ерекше емес, ендеше олардың $C = C_m \cdot C_{m-1} \cdots C_2 \cdot C_1$ және $D = D_1 \cdot D_2 \cdots D_{s-1} \cdot D_s$ көбейтінділері де ерекше емес матрицалар болады. Демек, $A \sim B$. Теорема дәлелденді.і

84.3.1-салдар: *Ұқсас матрицалардың рангілері бірдей.*

(83.3)- және (83.2)-формулалар негізінде матрицалардың эквиваленттік және ұқсастық белгілерін операторлық түрінде табуға болады.

84.4-теорема: *Тік бұрышты $A, B \in \mathcal{M}_{k \times n}(P)$ матрицалары эквивалент болуы үшін олар бір ғана сызықтық оператордың матрицалары болуы қажетті және жеткілікті.*

Шаршы $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}(P)$ матрицалары ұқсас болуы үшін олар бір ғана сызықтық түрлендірудің матрицалары болуы қажетті және жеткілікті.

Дәлелдеу. Теореманың екі тұжырымының екеуінің де жеткіліктілігі 83.4-теорема және 83.4.1-салдар бойынша айқын. Теореманың бірінші тұжырымының қажеттілігін көрсетейік. $A, B \in \mathcal{M}_{k \times n}(P)$ матрицалары эквивалент болсын. Онда ерекше емес $C \in \mathcal{M}_k(P)$ және $D \in \mathcal{M}_n(P)$ матрицалары табылып $B = C \cdot A \cdot D$ теңдігі орындалады. P өрісі бойынша өлшемділіктері $\dim X = n$, $\dim Y = k$ болатын қандай да бір X және Y сызықтық кеңістіктерін белгілейік. X кеңістігінде қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ал Y кеңістігінде қандай да бір $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базисін алайық. A матрицасының элементтерін α_{ij} арқылы белгілесек, 83.1-теорема бойынша,

$$(\mathcal{A}e_i)_q = (\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ki})', i = \overline{1, n},$$

теңдіктерімен анықталған $\mathcal{A}$ сызықтық операторы бірегей табылып, $A_{qe} = A$ болады. e_1, e_2, $\ldots$, e_n базисіндегі координаталары D матрицасының сәйкесінше бірінші, екінші, $\ldots$, n-бағандары болатын векторларды $a_1, a_2, \ldots, a_n$ арқылы белгілейік. $\det D \neq 0$ болғандықтан $a_1, a_2, \ldots, a_n$ векторлар жүйесі X сызықтық кеңістігінің базисін құрайды. $D = P_{ea}$, яғни e_1, e_2, $\ldots$, e_n базисінен a_1, $a_2, \ldots, a_n$ базисіне көшу матрицасы D болады. Сондай-ақ, C^{-1} матрицасын Y кеңістігінің $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базисінен басқа бір $b_1, b_2, \ldots, b_k$ базисіне көшу матрица ретінде қарастыруға болады, яғни $C^{-1} = P_{qb}$ деуге болады. Онда

$$B = C \cdot A \cdot D = P_{bq} \cdot A_{qe} \cdot P_{ea} = A_{ba}.$$

Демек, B матрицасы $\mathcal{A}$ сызықтық операторының $b_1, b_2, \ldots, b_k$ және $a_1, a_2, \ldots, a_n$ базистер жұбындағы матрицасы болады. Сонымен, A мен B екеуі де $\mathcal{A}$ сызықтық операторының матрицалары болып шықты.

Теореманың екінші тұжырымының қажеттілігі дәл осылай дәлелденеді. Оны біз жаттығу ретінде қалдырамыз.

84.4.1-салдар: *Сызықтық оператордың барлық матрицаларының рангілері өзара тең. Яғни сол рангке тең сан оператордың инварианты болып табылады.*

$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ кез келген сызықтық оператор, ал A оның қандай да бір матрицасы болсын. A матрицасының рангін r арқылы белгілесек, онда $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix}$ матрицасы A матрицасына эквивалент. R матрицасының $(1,1), (2,2), \ldots, (r,r)$ орындарында 1, ал қалған орындарда 0 жазылған. 84.4-теорема бойынша, R да $\mathcal{A}$ операторының матрицасы болып табылады. Қандай базистер жұбында $\mathcal{A}$ операторының матрицасы R болады деген қойылған сұраққа жауап беру қиын емес. e_1, e_2, $\ldots$, e_n векторлар жүйесі X кеңістігінің қандай да бір базисі болсын. Онда $r(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$ рангі тең r. Қажет болса e_1, e_2, $\ldots$, e_n векторлар орындарын алмастырып, $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_r$ векторлар жүйесін $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n$ жүйесінің базасы деуімізге болады. Y кеңістігінің алғашқы r базистік вектор ретінде $\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_r$ векторларын алып, оларды Y кеңістігінің базисіне дейін толықтырамыз. Осылай құрастырылған базистер жұбында $\mathcal{A}$ операторының матрицасы R болатыны айқын.

84.1-ескерту. Ұқсас шаршы матрицалар, әлбетте, эквивалент болады, яғни $A \approx B$ қатынасынан $A \sim B$ қатынасы шығады. Кері тұжырымының жалпы жағдайда ақиқат болмауын ескере кетейік. Мысалы, $2\mathcal{E}$ және $3\mathcal{E}$ скаляр операторларының матрицалары эквивалент болғанымен, олар ұқсас емес.

Бақылау сұрақтары

84.1-сұрақ. Тік бұрышты матрицалар жиынында $\sim$ эквиваленттік қатынасы рефлексив, транзитив және симметриялы болатынын дәлелдеңіз.
84.2-сұрақ. Шаршы матрицалар жиынында $\approx$ ұқсастық қатынасы рефлексив, симметриялы және транзитив болатынын көрсету керек.
84.3-сұрақ. S кеңістігіндегі центрлік симметрия мен скаляр оператордың матрицалары эквивалент (ұқсас) бола ма?
84.4-сұрақ. Жазықтықтың өстік симметрия мен центрлік симметрия сызықтық түрлендірулердің матрицалары эквивалент (ұқсас) бола ма?
84.5-сұрақ. Жазықтықтың өстік симметрия мен бұру сызықтық түрлендірулердің матрицалары эквивалент (ұқсас) бола ма?
84.6-сұрақ. Бірлік матрица қандай матрицаларға ұқсас болады.
84.7-сұрақ. Диагонал матрица қандай матрицаларға ұқсас болады.

§85. Сызықтық оператордың бейнесі мен өзегі, рангі мен дефекті.

Әдетте, математикада белгісіз f бейнелеуінің зерттеуі алдымен оның анықтау және өзгеру жиындарын сонымен қатар оның нөлдерін, яғни $f(x) = 0$ теңдеуінің шешімдер жиынын, табу есептерімен басталады. Жалпы жағдайда бұл есептерді шешу оңай емес. Сызықтық алгебрада сызықтық операторлар негізгі бейнелеулер болып табылады. Олар үшін айтылған есептердің әдемі шешімдері бар.

Кез келген $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторының $\mathcal{A}x$ мәні барлық $x \in X$ векторы үшін анықталған. Ендеше, $\mathcal{A}$ операторының анықтау жиыны X кеңістігін түгел қамтиды.

85.1-анықтама: $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ операторының өзгеру жиыны оның *бейнесі,* ал $\mathcal{A}x = \theta$ теңдуінің шешімдер жиыны оның *өзегі* деп аталады. $\mathcal{A}$ операторының бейнесі мен өзегі сәйкесінше $\operatorname{im}\mathcal{A}$ және $\ker\mathcal{A}$ арқылы белгіленеді. Сонымен,

$$\operatorname{im}\mathcal{A} = \{y \in Y \mid \exists x \in X(y = \mathcal{A}x)\},$$

$$\ker\mathcal{A} = \{x \in X \mid \mathcal{A}x = \theta\}.$$

82-параграфта қарастырылған мысалдардағы сызықтық операторлардың бейне мен өзектерін табайық.

85.1-мысал. $\lambda\mathcal{E}$ скаляр операторының бейнесі мен өзегі λ коэффициентіне байланысты. $\lambda = 0$ болса, онда скаляр операторы $\mathcal{O}$ нөлдік операторына тең болады да, оның барлық мәндері θ нөлдік векторына тең. Демек, бұл жағдайда $\operatorname{im}\mathcal{O} = \{\theta\}$, ал $\ker\mathcal{O} = X$. Егер $\lambda \neq 0$ болса, онда $\lambda\mathcal{E}$ скаляр операторы әрбір векторды λ рет созады. Ендеше, $\operatorname{im}\lambda\mathcal{E} = X$, ал $\ker\lambda\mathcal{E} = \{\theta\}$.

85.2-мысал. Φ_φ бұру түрлендіруінің бейнесі $\operatorname{im}\Phi_\varphi = \Pi$, ал өзегі $\ker\Phi_\varphi = \{\theta\}$. Себебі, әр вектордың кері бейнесі $-\varphi$ бұрышына бұру арқылы алынады.

85.3-мысал. 82.3-мысалда $a = \theta$ және $b = \theta$ болса, онда кез келген $x \in S$ үшін $\mathcal{A}x = (x, a) = (x, \theta) = 0$ және $\mathcal{B}x = [x, b] = [x, \theta] = \theta$. Демек, $\operatorname{im}\mathcal{A} = \{0\}$, $\ker\mathcal{A} = S$, $\operatorname{im}\mathcal{B} = \{\theta\}$, $\ker\mathcal{B} = S$.

Егер $a \neq \theta$ болса, онда $\operatorname{im}\mathcal{A} = \mathbb{R}$, $\ker\mathcal{A} = a^\perp$. Себебі, кез келген α нақты саны үшін

$$\mathcal{A}\left(\frac{\alpha}{(a, a)} \cdot a\right) = \alpha \text{ және } (x, a) = 0 \Leftrightarrow x \perp a.$$

Егер $b \neq \theta$ болса, онда $\operatorname{im}\mathcal{B} = b^\perp$, $\ker\mathcal{B} = L(b)$. $\operatorname{im}\mathcal{B} \subseteq b^\perp$, $L(b) \subseteq \ker\mathcal{B}$ қатыстары айқын, себебі кез келген x бағытталған кесінді үшін $[x, b] \perp b$ және x пен b коллинеар болса, онда $[x, b] = \theta$.

$b^\perp \subseteq \operatorname{im}\mathcal{B}$ қатысты көрсету үшін қандай да бір $c \in b^\perp$ нөлдік емес бағытталған кесіндісін алып:

- $x \perp b$, $x \perp c$;
- (x, b, c) бағытталған кесінділер үштігі — оң үштік,
- $|c| = |x| \cdot |b|$,

үш шартты қанағаттандыратын x векторын табамыз. Онда $\mathcal{B}x = c$ теңдігі векторлық көбейтіндінің анықтамасынан оңай шығады.

$\ker \mathcal{B} \subseteq L(b)$ қатыстың орындалуын көрсету үшін кез келген $d \in \ker \mathcal{B}$ векторын алып, оның b–ға коллинеарлығын дәлелдеуміз керек. $d \in \ker \mathcal{B}$ шарты $[d, b] = \theta$ шартына пара-пар, ал векторлық көбейтіндінің қасиеті бойынша, бағытталған кесінділердің векторлық көбейтіндісі нөлдік вектор болуы үшін олардың коллинеарлығы қажетті және жеткілікті.

85.4-мысал. $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ дифференциалдау операторының бейнесі $\operatorname{im} \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ал өзегі $\ker \mathcal{D} = \mathbb{R}_0[X]$. Мұның себептері: туынды алғанда көпмүшенің дәрежесі кемийді және $f' = 0$ теңдеуінің шешімдері дәл тұрақты көпмүшелер болады.

85.1–85.4-мысалдардың бәрінде сызықтық оператордың бейнесі мен өзегі сызықтық кеңістіктердің ішкеңістіктері болып шықты. Жалпы жағдай үшін де тура осындай болады.

85.2-тұжырым: *Кез келген $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторының* $\ker\mathcal{A}$ *өзегі X сызықтық кеңістігінің, ал* $\operatorname{im}\mathcal{A}$ *бейнесі Y сызықтық кеңістігінің ішкеңістігі болады.*

Дәлелдеу. Егер $x_1, x_2 \in \ker\mathcal{A}$ болса, онда $\mathcal{A}x_1 = \theta$, $\mathcal{A}x_2 = \theta$. Өрістің кез келген α, β коэффициенттері үшін $\mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha\mathcal{A}x_1 + \beta\mathcal{A}x_2 = \theta$. Демек, $\ker\mathcal{A}$ өзегі X сызықтық кеңістігінің сызықтық өрнектер бойынша тұйық жиынын құрайды, ендеше, ол X кеңістігінің ішкеңістігі болады.

Егер $y_1, y_2 \in \operatorname{im}\mathcal{A}$ болса, онда кейбір $x_1, x_2 \in X$ үшін $\mathcal{A}x_1 = y_1$, $\mathcal{A}x_2 = y_2$ болады да $\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha\mathcal{A}x_1 + \beta\mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(\alpha x_1 + \beta x_2)$. Демек, $\operatorname{im}\mathcal{A}$ бейнесі Y сызықтық кеңістігіндегі сызықтық өрнектектер бойынша тұйық жиын болады.

85.2-тұжырым бойынша, аналитикалық геометриядағы әрбір сызықтық оператордың бейнесі мен өзегі не жалғыз θ векторы, не полюстен өтетін түзу, не полюстен өтетін жазықтық, не кеңістіктің өзі болады. Осы себептен олар нөлдік ішкеңістігінен өзге шенелген жиын немесе жарты жазықтық немесе жарты кеңістік бола алмайды. Мысалы, бағытталған кесіндіге оның ұзындығын сәйкес қоятын $\mathcal{A}x = |x|$ ереже сызықтық функционал бола алмайды.

85.2-тұжырым сызықтық операторлардың өте маңызды екі сандық инвариантын енгізуге мүмкіндік туғызады.

85.3-анықтама: $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық операторының *рангі* деп оның $\operatorname{im}\mathcal{A}$ бейнесінің, ал *дефекті* деп оның $\ker\mathcal{A}$ өзегінің өлшемділігі аталады. $\mathcal{A}$ операторының рангі мен дефекті сәйкесінше $\mathrm{r}(\mathcal{A})$ мен $\mathrm{def}(\mathcal{A})$ арқылы белгіленеді. Сонымен,

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{im}\mathcal{A}), \quad \mathrm{def}(\mathcal{A}) = \dim\ker(\mathcal{A}).$$

85.4-тұжырым: *Ақырлы өлшемді X сызықтық кеңістігін бейнелейтін $\mathcal{A}$ сызықтық операторының бейнесі X кеңістігінің базистік векторлар бейнелерінен құрылған сызықтық қабықшасына тең болады.*

Дәлелдеу. X кеңістігінің қандай да бір e_1, e_2, $\ldots$, e_n базисін алып,

$$\mathrm{im}\mathcal{A} = L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$$

теңдігін дәлелдеуіміз керек. $L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$ сызықтық қабықшасының жасаушылары $\mathrm{im}\mathcal{A}$ бейнесіне тиісті болғандықтан

$$L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) \subseteq \mathrm{im}\mathcal{A}$$

қатысын аламыз.

Егер $y \in \mathrm{im}\mathcal{A}$ болса, онда кемінде бір $x \in X$ үшін

$$y = \mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n) = \\ = \alpha_1\mathcal{A}(e_1) + \alpha_2\mathcal{A}(e_2) + \cdots + \alpha_n\mathcal{A}(e_n).$$

Мұндағы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ коэффициенттері x векторының e базисіндегі координаталары. Демек, $\mathrm{im}\mathcal{A} \subseteq L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$.

85.5-теорема: *Сызықтық оператордың рангі мен оның кез келген матрицасының рангі тең сандар.*

Дәлелдеу. 84.4.1-салдар бойынша, сызықтық оператордың барлық матрицаларының рангілері өзара тең. Демек, теореманы дәлелдеу үшін оператордың қандай да бір матрицасын қарастыру жеткілікті. X сызықтық кеңістігін базисі e_1, e_2, $\ldots$, e_n, Y сызықтық кеңістігінің базисі $q_1, q_2, \ldots, q_k$, ал A_{qe} осы базистер жұбындағы $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ операторының матрицасы болсын. 85.4-тұжырымнан

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \dim L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n) = \mathrm{r}(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n)$$

теңдіктерін алмыз. A_{qe} матрицасының бағандары $\mathcal{A}e_1$, $\mathcal{A}e_2$, $\ldots$, $\mathcal{A}e_n$ векторларының $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базисіндегі координаталары болғандықтан, керекті $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(A_{qe})$ теңдігі бірден шығады.

85.4- және 85.5-тұжырымдар сызықтық оператордың бейнесі мен рангін табу жолын көрсететін болса, келесі "сызықтық оператордың рангі туралы теорема" ранг пен дефекттің байланысын береді.

85.6-теорема: *Егер $\mathcal{A}$ сызықтық операторы X ақырлы өлшемді сызықтық кеңістігін Y сызықтық кеңістігіне бейнелейтін болса, онда*

$$\mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{def}(\mathcal{A}) = \dim X.$$

Дәлелдеу. $X = \ker\mathcal{A} \dotplus L$ болатындай X кеңістігінің қандай да бір L ішкеңістігін белгілеп алайық. $\mathcal{A}$ бейнелеуінің L жиынына $\varphi = \mathcal{A} \restriction L$ тарылуы L мен $\mathrm{im}\mathcal{A}$ сызықтық кеңістіктерінің арасындағы изоморфизм болатынын көрсетейік.

Кез келген $x \in L$ үшін $\varphi x = \mathcal{A}x$ болғандықтан φ бейнелеуінің де сызықтық қасиеті бар. Енді осы бейнелеу инъектив болатынын көрсетейік. Егер $x_1, x_2 \in L$ үшін $\varphi x_1 = \varphi x_2$ болса, онда $\varphi(x_1 - x_2) = \mathcal{A}(x_1 - x_2) = \theta$. Демек, $x_1 - x_2 \in L \cap \ker\mathcal{A}$. Осыдан, 72.2.2-салдар бойынша, $x_1 - x_2 = \theta$ шығады. Демек, φ — өзара бірмәнді бейнелеу.

Егер $y \in \mathrm{im}\mathcal{A}$ болса, онда кемінде бір $x \in X$ үшін $y = \mathcal{A}x$. $X = \ker\mathcal{A} \dotplus L$ болгандықтан $a \in \ker\mathcal{A}$ және $b \in L$ табылып $x = a + b$ теңдігі орындалады. Онда $y = \mathcal{A}(a+b) = \mathcal{A}a + \mathcal{A}b = \mathcal{A}b = \varphi b$. Демек, $\mathrm{im}\varphi = \mathrm{im}\mathcal{A}$.

$\varphi : L \mapsto \mathrm{im}\mathcal{A}$ изоморфизм болғандықтан, изоморфизм туралы 67.1-теорема бойынша, $\dim L = \dim(\mathrm{im}\mathcal{A})$. Ал $X = \ker\mathcal{A} \dotplus L$ кеңістіктердің тура қосындысынан, 72.2.1-салдар бойынша,

$$\dim X = \dim(\ker\mathcal{A}) + \dim L.$$

Олай болса, $\dim X = \mathrm{r}(\mathcal{A}) + \mathrm{def}(\mathcal{A})$.

Сызықтық оператордың бейнесі мен өзегін табу тәсілдері

X және Y екеуі де P өрісі бойынша қандай да бір ақырлы өлшемді сызықтық кеңістіктер, ал $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ кез келген сызықтық оператор болсын. $\mathcal{A}$ операторының бейнесі мен өзегін сипаттау үшін олардың базистерін табу жеткілікті. Ал ішкеңістіктердің базистерін табу үшін координаталар тәсілі ең қолайлы болатыны айқын. Ендеше, X және Y кеңістіктерінде қандай да бір e_1, e_2, $\ldots$, e_n және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистерін белгілеп, координаталық изоморфизмдерді пайдаланайық. Дәлірек айтқанда, кез келген $y \in \mathrm{im}\mathcal{A}$ және $x \in \ker\mathcal{A}$

векторлар орнына олардың $y_q \in (\mathrm{im}\mathcal{A})_q$ және $x_e \in (\mathrm{ker}\mathcal{A})_e$ координаталық бағандарын сипаттаумыз керек. Бұл жерде $(\mathrm{im}\mathcal{A})_q \subseteq P^k$ және $(\mathrm{ker}\mathcal{A})_e \subseteq P^n$ қатыстарын ескере кетейік.

$\mathcal{A}$ операторының $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$ және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базістер жұбындағы $A = (\alpha_{ij})$ матрицасын құрастырып алайық та, A матрицасының бағандарын, әдеттегідей, $a^1, a^2, \ldots, a^n$ арқылы белгілейік. 85.4-тұжырым бойынша,

$$\mathrm{im}\mathcal{A} = L(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2, \ldots, \mathcal{A}e_n),\ \text{ал}\ (\mathcal{A}e_1)_q = a^1,$$
$$(\mathcal{A}e_2)_q = a^2, \ldots, (\mathcal{A}e_1)_q = a^n.$$

Ендеше, $a^1, a^2, \ldots, a^n$ векторлар жүйесінің базасы $(\mathrm{im}\mathcal{A})_e$ кеңістігінің базисі болады.

$\mathrm{ker}\mathcal{A}$ өзегіне тиісті x векторларын сипаттайтын $\mathcal{A}x = \theta$ теңдеуінің, 83.3-теоремаға сүйеніп, координаталық түрін қарастырсақ,

$$A \cdot x_e = \theta$$

біртекті алгебралық сызықтық теңдеулер жүйесін аламыз. Ал оның фундаментал шешімдер жүйесі $(\mathrm{ker}\mathcal{A})_e$ кеңістігінің базисі болады.

Сонымен, $\mathrm{im}\mathcal{A}$ бейнесін сипаттау үшін A матрицасының бағандар жүйесінің базасын, ал $\mathrm{ker}\mathcal{A}$ өзегін сипаттау үшін матрицасы A болатын біртекті алгебралық теңдеулер жүйесінің шешімдер жиынын табу керек. Осы екі есеп матрицаны Гаусс тәсілімен сатылы түрге келтіру арқылы оңай шешіледі. Дегенмен, біріншісінде Гаусс тәсілі A матрицасының бағандарына, ал екіншісінде оның жолдарына колданылады. Яғни осы екі есеп бір-бірімен көзге байланыссыз болып көрінеді. Бірақ бұл олай емес. Келесі алгоритм осы екі есепті бір жолымен шығарады. Сонымен бірге, ол алгоритмді соңынан біз көптеген баска есептерге де қолданамыз.

Сызықтық оператор бейнесі мен өзегінің базистерін қатар құру алгоритмі

Жоғарығыдай, X және Y екеуі де P өрісі бойынша қандай да бір ақырлы өлшемді сызықтық кеңістіктер, ал $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ кез келген сызықтық оператор болсын. Алгоритмнің нұсқаулары мынадай:

1. X және Y кеңістіктерінің қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$ және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистерін белгілейміз.

2. $\mathcal{A}$ операторының $e_1, e_2, \ldots, e_n$ және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистер жұбында A матрицасын табамыз. Әрине, A матрицасының өлшемділігі $k \times n$.

3. $(n+k) \times n$ өлшемді екі блоктан тұратын $B = \left(\frac{E}{A} \right)$ матрицасын құрастырамыз. Бұл жерде E арқылы n–ретті шаршы матрица белгіленген.

4. B матрицасының бағандарына қарапайым түрлендірулер жасап, оның төменгі $k \times n$ өлшемді бөлігі сатылы түрде болатындай, $(n+k) \times n$ өлшемді F матрицасына келтіреміз.

5. F матрицасын төрт блокқа бөліктейміз: $F = \left(\begin{array}{c|c} C & K \\ \hline I & O \end{array} \right)$. Бұл жерде O — нөлдік матрица; I — нөлдік бағандары жоқ, сатылы матрица; C мен K матрицаларының жолдар саны n–ге, ал I мен O–ның жолдар саны k–ға тең.

85.7-тұжырым: *K матрицасының бағандары $(\ker\mathcal{A})_e$ кеңістігінің базисін құрайды. Ал I матрицасының бағандары $(\mathrm{im}\mathcal{A})_q$ кеңістігінің базисін құрайды.*

Дәлелдеу. B және F матрицаларының, сонымен қатар 4-нұсқауды орындау барысында шыққан матрицалар бағандарын жоғарғысы n өлшемді, ал төменгісі k өлшемді екі бағанға бөліктеу болады. Жоғарғы бағанды x, ал төменгісін y арқылы белгілейік. Жоғарыда айтылған матрицалардың барлық $\binom{x}{y}$ бағандары үшін $y = A \cdot x$ теңдігі орындалатынын индукция тәсілімен дәлелдейік.

Индукция 4-нұсқауды орындау барысындағы қадамдар бойынша жүргізіледі. Индукция базисі B матрицасының бағандары үшін жасалады. Егер $x = (1, 0, 0, \ldots, 0)'$, ал $y = (\alpha_{11}, \alpha_{21}, \ldots, \alpha_{n1})'$ болса, онда $y = A \cdot x$ теңдігі айқын, яғни бірінші баған үшін біздің тұжырым ақиқат. Қалған бағандар үшін да оның ақиқаттығы айқын.

Индукциялық ұйғарымы: $\binom{x_1}{y_1}$ және $\binom{x_2}{y_2}$ қандай да бір бағандары үшін $y_1 = A \cdot x_1$ және $y_2 = A \cdot x_2$ теңдіктері орындалсын делік. Енді осы екі бағанға қарапайым түрлендіру жасап, одан шыққан бағандарға да сәйкес теңдіктердің орындалуын көрсетуіміз керек. Әлбетте, $\binom{x_1}{y_1}$ және $\binom{x_2}{y_2}$ бағандарының орнын алмастырсақ, одан теңдіктеріміз өзгермейді. Енді, $\binom{x_1}{y_1}$ бағанын нөлден өзге λ коэффициентіне көбейтейік. Одан шыққан $\binom{\lambda \cdot x_1}{\lambda \cdot y_1}$ баған үшін $(\lambda \cdot y_1) = \lambda \cdot (A \cdot x_1) = A(\lambda \cdot x_1)$ теңдіктері шығады. Сонынан, $\binom{x_1}{y_1}$ бағанына $\binom{x_2}{y_2}$ бағанын μ коэффициентіне көбейтіп алып қоссақ, одан $\binom{x_1 + \mu \cdot x_2}{y_1 + \mu \cdot y_2}$ бағаны шығады. Бұл баған үшін $(y_1+\mu\cdot y_2) = A\cdot x_1+\mu\cdot(A\cdot x_2) = A\cdot(x_1+\mu\cdot x_2)$. Демек, бағандарға қандай қарапайым түрлендіру жасасақ та, одан бағандардың бөліктері арасындағы қатыс өзгермейді.

Енді C,K,I матрицаларының негізгі қасиетін атап өтейік: бұл матрицалардың бағандары сызықтық тәуелсіз болады. Шынында да, C және K матрицаларының бағандары E матрицасының (сызықтық тәуелсіз) бағандарынан қарапайым түрлендірулер тізбегі бойынша табылған. Ал I матрицасы сатылы болғандықтан оның бағандары сызықтық тәуелсіз. Осыдан I матрицасының бағандар саны $\mathrm{r}(A)$ рангіне, ал K мен O матрицаларының бағандар саны өзара тең және $n - \mathrm{r}(A)$ санына тең болатынын аламыз. Соңғысынан, 85.6-теорема бойынша, K матрицасының бағандар саны $\mathrm{def}(A)$ деффектісіне тең.

Сонымен, I матрицасының бағандары $(\mathrm{im}\mathcal{A})_q$ кеңістігіне тиісті векторлар болып, сызықтық тәуелсіз жүйе құрайды, ал олардың саны $\dim(\mathrm{im}\mathcal{A})_q$ өлшемділігіне тең. Ендеше, олар $(\mathrm{im}\mathcal{A})_q$ кеңістігінің базисі болады. K матрицасының әрбір x бағаны үшін $A\cdot x = \theta$, K матрицасының бағандары сызықтық тәуелсіз және олардың саны $\dim(\ker\mathcal{A})_e$ өлшемділігіне тең. Демек, K матрицасының бағандары $(\ker\mathcal{A})_e$ кеңістігінің базисі болады.

85.1-есеп. 85.4-мысалда $\mathcal{D} : \mathbb{R}_n[X] \mapsto \mathbb{R}_n[X]$ дифференциалдау операторының бейнесі $\mathrm{im}\,\mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$, ал өзегі $\ker\mathcal{D} = \mathbb{R}_0[X]$ болатынын көрсеттік. Енді осы оператордың бейнесі мен өзегін жоғарыдағы алгоритм бойынша тауып көрейік.

1. $x^n, x^{n-1}, \ldots, x^2, x, 1$ көпмүшелер жүйесі бұл есепке ең қолайлы $\mathbb{R}_n[X]$ кеңістігінің базисі болып табылады.

2. $\mathcal{D}x^n = nx^{n-1}, \mathcal{D}x^{n-1} = (n-1)x^{n-2}, \ldots, \mathcal{D}x^2 = 2x, \mathcal{D}x = 1, \mathcal{D}1 = 0$ болғандықтан, $\mathcal{D}$ сызықтық түрлендіруінің матрицасы
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ n & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & n-1 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
болады. Әрине, D шаршы матрицасының реті $n+1$.

3. $B = \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix}$ блокты матрицасында E — $(n+1)$-ретті бірлік матрица.

4. B матрицасына ешбір қарапайым түрлендіру жасаудың қажеті жоқ, яғни $F = B$.

5. F матрицасының блоктар құрамы мынадай: C матрицасы E бірлік матрицасының алғашқы n бағанынан құрастырылған, жалғыз бағанды K матрицасы E матрицасының соңғы бағанынан тұрады, O матрицасы жалғыз ғана нөлдік бағаннан тұрады, ал

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & n-1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

85.7-тұжырым бойынша, K матрицасының бағаны $\ker \mathcal{D}$ кеңістігінің, ал I матрицасының бағандары $\operatorname{im} \mathcal{D}$ кеңістігінің базистік векторларының координаталарын береді. Демек, 1 көпмүшесі өзектің, ал $nx^{n-1}, (n-1)x^{n-2}, \dots, 2x, 1$ көпмүшелері дифференциалдау оператордың бейнесінің базистері болады. Осыдан $\ker \mathcal{D} = \mathbb{R}_0[X]$ және $\operatorname{im} \mathcal{D} = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ оңай шығады.

85.2-есеп. 82.3-мысалдағы $\mathcal{B}$ операторына оның бейнесі мен өзегінің базистерін қатар құру алгоритмін қолданайық. Бұл оператордың матрицасын біз 83.2-мысалда тапқанбыз. Сондықтан алгоритмнің 4-нұсқауына бірден көшуге болады. Тек b векторының координаталарын нақтылау керек. Мысалы, $b = (1, 2, -1)'$ болсын. Онда

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ \hline -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) = F. \text{ Осыдан } K = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Демек, жалғыз b векторы $\ker\mathcal{B}$ өзегінің, ал $c = (-1,0,-1)', d = (0,1,2)'$ бағандары $\operatorname{im}\mathcal{B}$ бейнесінің базисін құрайды. Ендеше,

$$\ker\mathcal{B} = L(b), \text{ ал } \operatorname{im}\mathcal{B} = L(c,d).$$

$c \perp b$ және $d \perp b$ болғандықтан $\operatorname{im}\mathcal{B} = b^{\perp}$ теңдігі орындалады.

Бақылау сұрақтары

85.1-сұрақ. $\dim X = 3$, ал $\dim Y = 4$ болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық оператордың рангі қандай сан болу мүмкін?

85.2-сұрақ. $\dim X = 3$, ал $\dim Y = 4$ болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық оператордың деффекті қандай сан болу мүмкін?

85.3-сұрақ. $\dim X = 4$, ал $\dim Y = 3$ болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық оператордың рангі қандай сан болу мүмкін?

85.4-сұрақ. $\dim X = 4$, ал $\dim Y = 3$ болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ сызықтық оператордың деффекті қандай сан болу мүмкін?

85.5-сұрақ. X сызықтық кеңістігінің өлшемділігі тақ сан болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto X$ сызықтық түрлендіруінің рангі оның дефектіне тең болама?

85.6-сұрақ. $\dim X = n$ болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto X$ сызықтық түрлендіруінің рангі мен дефекттің $\mathrm{r}(\mathcal{A}) - \operatorname{def}(\mathcal{A})$ айырымы қандай сан болу мүмкін?

85.7-сұрақ. S бағытталған кесінділер кеңістігіндегі әсер ететін әр вектор бейнесінің ұзындығы бірге тең болатын қандай сызықтық түрлендірулер бар?

85.8-сұрақ. S бағытталған кесінділер кеңістігіндегі әсер ететін әр вектор бейнесінің ұзындығы бірден аспайтын сызықтық түрлендірулердің мысалдары қандай?

85.9-сұрақ. $\mathcal{J} : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}$ операторы $\mathcal{J}(f) = \int_0^1 f(x)dx$ ережесімен анықталсын. Бұл сызықтық оператордың бейнесі мен өзегі қандай?

85.10-сұрақ. Кез келген үзіліссіз f функциясы үшін

$$\mathcal{J}f = \int_a^b f(x)dx$$

ережесімен анықталған интегралдау $\mathcal{J} : C_{[-1,1]} \mapsto \mathbb{R}$ сызықтық функционалдың өзегі ақырлы өлшемді ме?

§86. Сызықтық операторларға қолданылатын амалдар.

Бұл параграфта сызықтық операторлардың жиындарын қарастырып, сол жиындарда бірнеше амал енгіземіз. Параграфтың соңына дейін X, Y, Z арқылы қандай да бір белгіленген P өрісі бойынша сызықтық кеңістіктер, ал $\mathcal{L}(X, Y)$ арқылы X кеңістігін Y кеңістігіне бейнелетін барлық сызықтық операторлар жиыны белгіленеді.

86.1-тұжырым: *Ақырлы өлшемді X және Y сызықтық кеңістіктерінде қандай да бір базистер жұбын белгілеу $\mathcal{L}(X, Y)$ операторлар жиыны мен $\mathcal{M}_{k\times n}(P)$ матрицалар жиыны арасындағы биективті сәйкестікті анықтайды*

Дәлелдеу. X және Y сызықтық кеңістіктерінде қандай да бір e_1, e_2, $\ldots$, e_n және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистер жұбын белгілеп алып, $\varphi : \mathcal{L}(X, Y) \mapsto \mathcal{M}_{k\times n}(P)$ бейнелеуін $\varphi(\mathcal{A}) = A_{qe}$ ережесімен анықтайық. Бұл ереже бойынша, әрбір $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ сызықтық операторына оның A_{qe} матрицасы сәйкес қойылады. 83.1- теорема мен 83.2-анықтаманы қолданып, φ бейнелеунің биектив болатынын көрсету оңай.

Сызықтық операторлардың теңдігі функциялардың теңдігінен айнымайды: кез келген $x \in X$ үшін бейнелері тең болатын (яғни, $\mathcal{A}x = \mathcal{B}x$ болатын) $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ операторлар *тең* деп аталады да $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ арқылы белгіленеді.

Сызықтық операторларға қолданылатын сызықтық амалдар

86.2-анықтама: $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ *операторларының қосындысы* деп кез келген $x \in X$ үшін бейнесі $(\mathcal{A} + \mathcal{B})x = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ ережесімен табылатын операторды атаймыз да оны $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ арқылы белгілейміз.

$\mathcal{A} + \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, Y)$ қатысын тексеру оңай. Шынында, $a, b \in X$ қандай да бір берілген векторлар, ал $\alpha, \beta \in P$ кез келген коэффициенттер болсын. Онда

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\alpha a + \beta b) = \mathcal{A}(\alpha a + \beta b) + \mathcal{B}(\alpha a + \beta b) = \alpha\mathcal{A}a + \beta\mathcal{A}b +$$
$$+ \alpha\mathcal{B}a + \beta\mathcal{B}b = \alpha(\mathcal{A}a + \mathcal{B}a) + \beta(\mathcal{A}b + \mathcal{B}b) = \alpha(\mathcal{A} + \mathcal{B})a + \beta(\mathcal{A} + \mathcal{B})b.$$

Демек, сызықтық операторларды қосу амалы $\mathcal{L}(X, Y)$ жиынында алгебралық амал болады.

86.3-анықтама: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$ *операторының* $\alpha \in P$ *коэффициентіне көбейтіндісі* деп кез келген $x \in X$ үшін бейнесі $(\alpha\mathcal{A})x = \alpha(\mathcal{A}x)$ ережесімен табылатын операторды атаймыз да оны $\alpha\mathcal{A}$ арқылы белгілейміз.

$\alpha\mathcal{A}$ операторы сызықтық болатынын біз жаттығу ретінде оқырмандарға қалдырамыз.

Сызықтық операторлар сызықтық кеңістігі

$\mathcal{L}(X,Y)$ сызықтық операторлар жиыны операторларды қосу және өрістің коэффициенттеріне көбейту амалдары бойынша тұйық. Ендеше, $\langle \mathcal{L}(X,Y), +, \cdot \rangle$ үштігі алгебралық жүйе болады. Мұндағы $\cdot$ символымен сызықтық операторларды P өрісінің коэффициенттеріне көбейту амалы белгіленген.

86.4-теорема: $\langle \mathcal{L}(X,Y), +, \cdot \rangle$ *алгебралық жүйесі* P *өрісі бойынша сызықтық кеңістік құрайды және бұл кеңістік матрицалардың* $\langle \mathcal{M}_{\dim Y \times \dim X}(P), +, \cdot \rangle$ *сызықтық кеңістігіне изоморф болады.*

Дәлелдеу. X және Y сызықтық кеңістіктердің қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$ және $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базистер жұбын белгілеп алып, $\varphi : \mathcal{L}(X,Y) \mapsto \mathcal{M}_{k\times n}(P)$ биектив бейнелеуін 86.1-тұжырымдағыдай $\varphi(\mathcal{A}) = A_{qe}$ ережесі бойынша анықтайық.

φ бейнелеуі сызықтық өрнектерді сақтайтынын көрсетейік. Кез келген $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,Y)$ операторлары және кез келген $\alpha, \beta \in P$ коэффициенттері және әрбір $e_j, j = \overline{1,n}$, базистік векторы үшін

$$(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})e_j = \alpha\mathcal{A}e_i + \beta\mathcal{B}e_j.$$

Бұл теңдіктің екі жағындағы векторлардың $q_1, q_2, \ldots, q_k$ базисіндегі координаталық бағандарын теңестірсек, онда $\varphi(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B})$ матрицасының j-бағаны $\varphi(\mathcal{A})$ және $\varphi(\mathcal{B})$ матрицаларының j-бағандарының α және β коэффициенттері бар сызықтық өрнегі болатындығын білдіреді. Осыдан

$$\varphi(\alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{B}) = \alpha\varphi(\mathcal{A}) + \beta\varphi(\mathcal{B})$$

теңдігін аламыз. Демек, φ бейнелеуі $\mathcal{L}(X,Y)$ және $\mathcal{M}_{k\times n}(P)$ алгебралық жүйелерінің изоморфизмі болады. $\mathcal{M}_{k\times n}(P)$ алгебралық жүйесі сызықтық кеңістік болғандықтан, оған изоморф $\mathcal{L}(X,Y)$ алгебралық жүйесі де сызықтық кеңістік болады. Теорема дәлелденді.

86.4.1-салдар: $\dim \mathcal{L}(X,Y) = \dim X \times \dim Y$.

86.1-мысал. П арқылы біз бұрынғыдай жазықтықта орналасқан бағытталған кесінділердің сызықтық кеңістігін белгілейміз. П жазықтығында қандай да бір OXY Декарт координаталар жүйесін белгілеп алайық. 86.4.1-салдар бойынша, $\dim\mathcal{L}(\Pi,\Pi) = 4$. Демек, П жазықтықғының кез келген сызықтық түрлендіруі төрт сызықтық түрлендірудің сызықтық өрнектеріне тең. Сондай төрт түрлендірудің бір мысалы: OX абсцис өсіне $\mathcal{P}_1$ ортогонал проекциялау, OY ординат өсіне $\mathcal{P}_2$ ортогонал проекциялау, жазықтықты 90 градусқа O айналасында $\Phi_{\frac{\pi}{2}}$ бұру, $y = x$ түзуіне қарағанда $\mathcal{S}$ симметрия жасау. Бұл төрт түрлендіру $\mathcal{L}(\Pi,\Pi)$ кеңістігінде сызықтық тәуелсіз болатынын көрсету қиын емес. Ол үшін 86.4-теоремадағы изоморфизмді пайдалану болады. OXY координаталар жүйесшнің $\mathbf{i},\mathbf{j}$ Декарт базисінде

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

матрицалары сол операторлардың матрицалары болады. Изоморфизмнің қасиеттерін пайдаланып, P_1, P_2, S, F матрицаларының сызықтық тәуелсіздігін көрсетуіміз керек. Ал $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ кеңістігі мен $\mathbb{R}^4$ кеңістігі арасында өте қарапайым изоморфизм бар. Сол изоморфизм P_1, P_2, S, F матрицаларына сызықтық тәуелсіз

$$p_1 = (1,0,0,0), p_2 = (0,0,0,1), s = (0,1,1,0), f = (0,-1,1,0)$$

жолдар жүйесін сәйкес қояды.

Сонымен, П жазықтығының кез келген сызықтық турлендіруі екі ортогонал проекциялау, бір симметрия мен бір бұрудың сызықтық өрнегі болады.

Сызықтық операторларды өзара көбейту амалы

86.5-анықтама: X, Y, Z үшеуі де P өрісі бойынша қандай да бір сызықтық кеңістіктер болсын. $\mathcal{A} : X \mapsto Y$ операторының $\mathcal{B} : Y \mapsto Z$ операторына *көбейтіндісі* деп кез келген $x \in X$ үшін $\mathcal{C}x = \mathcal{B}(\mathcal{A}x)$ болатындай $C : X \mapsto Z$ операторын атаймыз. $\mathcal{A}$ операторының $\mathcal{B}$ операторына көбейтіндісін $\mathcal{B} \circ \mathcal{A}$ немесе қысқаша $\mathcal{B}\mathcal{A}$ арқылы белгілейміз.

$\mathcal{B}\mathcal{A}$ операторы $\mathcal{A}$ және $\mathcal{B}$ бейнелеулерінің кәдімгі суперпозиция (композиция) болатыны айқын.

Егер $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(Y,Z)$ болса, онда $\mathcal{B} \circ \mathcal{A} \in \mathcal{L}(X,Z)$. Шынында да, кез келген $a, b \in X$ және кез келген $\alpha, \beta \in P$ үшін

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \circ \mathcal{A}(\alpha a + \beta b) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\alpha a + \beta b)) = \mathcal{B}(\alpha \mathcal{A} a + \beta \mathcal{A} b) = \\ = \alpha \mathcal{B}(\mathcal{A} a) + \beta \mathcal{B}(\mathcal{A} b) = \alpha \mathcal{B} \circ \mathcal{A} a + \beta \mathcal{B} \circ \mathcal{A} b.\end{aligned}$$

$X = Y = Z$ дербес жағдайда сызықтық операторлардың көбейтіндісі $\mathcal{L}(X,X)$ жиынында алгебралық амал болады.

Сызықтық операторлардың сақинасы

X қандай да бір n өлшемді сызықтық кеңістік болсын. $\mathcal{L}(X,X)$ сызықтық түрлендәрулер жиыны операторларды қосу және өзара көбейту амалдары бойынша тұйық. Ендеше, $\langle \mathcal{L}(X,X), +, \circ \rangle$ үштігі алгебралық жүйе болады.

86.6-теорема: $\langle \mathcal{L}(X,X), +, \circ \rangle$ *алгебралық жүйе бірлігі бар сақина болады және бұл сақина матрицалардың* $\langle \mathcal{M}_n(P), +, \cdot \rangle$ *сақинасына изоморф.*

Дәлелдеу. X сызықтық кеңістігінің қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисін белгілеп алып, $\varphi : \mathcal{L}(X,X) \mapsto \mathcal{M}_n(P)$ биектив бейнелеуін 86.1-тұжырымдағыдай $\varphi(\mathcal{A}) = A_e$ ережесі бойынша анықтайық.

φ бейнелеуі қосу амалын сақтайтыны 86.4-теоремада көрсетілген. Енді φ операторларды $\circ$ көбейту амалын сақтайтынын дәлелдейік. $\varphi\mathcal{A}$ матрицасының элемнттері $\alpha_{ij}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}$, болсын, ал $\varphi\mathcal{B}$ матрицасының бағандарын $b^1, b^2, \ldots, b^n$ белгілейік. Онда кез келген $j = \overline{1,n}$ үшін

$$\begin{aligned}(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) e_j = \mathcal{B}(\mathcal{A} e_j) = \mathcal{B}(\alpha_{1j} e_1 + \alpha_{2j} e_2 + \cdots + \alpha_{nj} e_n) = \\ = \alpha_{1j} \mathcal{B} e_1 + \alpha_{2j} \mathcal{B} e_2 + \cdots + \alpha_{nj} \mathcal{B} e_n.\end{aligned}$$

Енді осы теңдіктерде векторлар орнына олардың $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисіндегі координаталарын қойсақ, онда

$$\begin{aligned}((\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) e_j)_e = \alpha_{1j} (\mathcal{B} e_1)_e + \alpha_{2j} (\mathcal{B} e_2)_e + \cdots + \alpha_{nj} (\mathcal{B} e_n)_e = \\ = \alpha_{1j} b^1 + \alpha_{2j} b^2 + \cdots + \alpha_{1n} b^n\end{aligned}$$

координаталық бағандардың теңдіктерін аламыз. $\varphi(\mathcal{B} \circ \mathcal{A})$ матрицасының j-бағаны $((\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) e_j)_e$ бағанына тең, ал (36.8)-формула бойынша, $\alpha_{1j} b^1 + \alpha_{2j} b^2 + \cdots + \alpha_{1n} b^n$ сызықтық өрнегі $\varphi(\mathcal{B}) \cdot \varphi(\mathcal{A})$ көбейтіндісінің j-бағанына тең. Демек, $\varphi(\mathcal{B} \circ \mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B}) \cdot \varphi(\mathcal{A})$.

φ изоморфизм, ал $\langle \mathcal{M}_n(P), +, \cdot \rangle$ бірлігі бар сақина болғандықтан, $\langle \mathcal{L}(X, X), +, \circ \rangle$ алгебралық жүйесі де бірлігі бар сақина болады. φ бейнелеу $\mathcal{E}$ бірлік операторына бірлік матрицаны, ал $\mathcal{O}$ нөлдік операторына нөлдік матрицаны сәйкес қоятыны айқын. Теорема дәлелденді.

86.1-ескерту. $\langle \mathcal{L}(X, X), +, \circ \rangle$ сақинасы, жалпы айтқанда, коммутатив емес. Мысалы, егер S кеңістігінде координаталардың $OXYZ$ Декарт жүйесі беріліп, $\mathcal{A}$ операторы S кеңістігінің OX өсінің айналасында OY өсінен OZ өсіне қарай $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұру, ал $\mathcal{B}$ операторы S кеңістігінің OZ өсінің айналасында OX өсінен OY өсіне қарай $\frac{\pi}{2}$ бұрышқа бұру болса, онда $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \circ \mathcal{A}$. Шынында да, егер $\mathbf{i}, j, k$ берілген $OXYZ$ жүйесінің Декарт базисі болса, онда

$$(\mathcal{A} \circ \mathcal{B})\mathbf{i} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathbf{i}) = \mathcal{A}\mathbf{j} = \mathbf{k},\ (BBB \circ \mathcal{A})\mathbf{i} = BBB(\mathcal{A}\mathbf{i}) = \mathcal{B}\mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

86.2-ескерту. $\langle X, P \rangle$ сызықтық кеңістіктігінің кез келген α элементі және кез келген $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathcal{L}(X, X)$ сызықтық түрлендірулері үшін

$$\alpha(\mathcal{A} \circ \mathcal{B}) = (\alpha \mathcal{A}) \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ (\alpha \mathcal{B})$$

теңдіктері ақиқат.

Бұл параграфта дәлелденген 86.4- және 86.6- изоморфизм туралы теоремалардың маңызы зор. Олар қосу, коэффициентке көбейту және өзара көбейту амалдарына қарағанда сызықтық операторлардың және матрицалардың қасиеттері бірдей болатынын көрсетеді. Осы амалдар туралы операторларға орындалатын теңдіктер, тұжырымдар, теоремалар, т.с.с. матрицаларға да орындалады және, керісінше, матрицаларға ақиқат сөйлемдер сызықтық операторларға да ақиқат. Мысалы $\mathcal{B} = \alpha_0 \mathcal{E} + \alpha_1 \mathcal{A} + \alpha_2 \mathcal{A}^2 + \cdots + \alpha_n \mathcal{A}^n$ болсын. Бұл жерде $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, X)$ қандай да бір $\langle X, P \rangle$ сызықтық кеңістіктігінің сызықтық түрлендіруі, ал $\alpha_i, i = \overline{0, n}$, коэффициенттері P өрісінің кез келген элементтері. B және A арқылы $\mathcal{B}$ және $\mathcal{A}$ операторларының X кеңістігінің қандай да бір $e_1, e_2, \ldots, e_n$ базисіндегі матрицалары болсын. Онда $B = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \cdots + \alpha_n A^n$. Егер f арқылы $\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_n x^n$ көпмүшесін белгілесек, онда $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$ *операторлық көпмүшесінің* матрицасы $B = f(A)$ *матрицалық көпмүшесі* болады. Мұны біз $(f(\mathcal{A}))_e = f((\mathcal{A})_e)$ түрінде жазғанымыз заңды.

Бақылау сұрақтары

86.1-сұрақ. $\mathcal{A}$ сызықтық операторын қандай да бір α коэффициентке көбейткенде одан оның бейнесі, өзегі, рангі, деффекті қалай өзгереді?

86.2-сұрақ. Егер $\mathcal{A}$ сызықтық түрлендіруіне $\mathcal{E}$ операторын қоссақ, онда одан бейнесі, өзегі, рангі, деффекті қалай өзгереді?

86.3-сұрақ. $\dim X = 1$ болса, онда $\dim \mathcal{L}(X, X)$ қандай болады және $\mathcal{L}(X, X)$ жиынындағы түрлендірулер қалай сипатталады?

86.4-сұрақ. $\mathcal{L}(\Pi, \Pi)$ кеңістігінің базисін тек әртүрлі бұрыштарға бұру операторларынан құрастыруға бола ма?

86.5-сұрақ. S бағытталған кесінділер кеңістігі болсын. $\mathcal{L}(S, S)$ кеңістігінің өлшемділігі қандай?

86.6-сұрақ. Π жазықтығында кез келген екі бұру коммутатив па?

86.7-сұрақ. $\langle \mathcal{L}(\Pi, \Pi), +, \circ \rangle$ сақинасы коммутатив па?

86.8-сұрақ. $\langle \mathcal{L}(S, S), +, \circ \rangle$ сақинасында нөл бөлгіштері бар ма?

86.9-сұрақ. $\langle \mathcal{L}(S, S), +, \circ \rangle$ сақинасында көбейту амалына қысқарту ережесі заңды ма? Яғни S бағытталған кесінділер кеңістігінің кез келген $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ түрледірулері үшін $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ теңдігі $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{A} \circ \mathcal{C}$ теңдігінің салдары бола ма?

§87. Ерекше емес операторлар тобы

87.1-анықтама: $\ker\mathcal{A}$ өзегі жағыз нөлдік вектордан тұратын $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, X)$ тірлендіруі *ерекше емес* оператор деп аталады.

Әлбетте, әрбір сызықтық оператордың өзегінде нөлдік вектор бар. Демек, ерекше оператордың өзегінде нөлден өзге векторлар бар да, ал ерекше емес оператордың өзегінде нөлдік вектордан өзге вектолар жоқ.

85.1–85.4-мысалдарда $\lambda\mathcal{E}$ скаляр операторы ($\lambda \neq 0$ болғанда) және Φ_φ бұру операторы ерекше емес, ал қалған екі оператор ерекше оператор болады.

87.2-теорема: $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(X, X)$ *операторы* $\langle X, P \rangle$ *сызықтық кеңістігінің қандай да бір түрлендіруі болсын. Онда келесі тұжырымдар пара-пар:*

(1) $\mathcal{A}$ *операторы ерекше емес;*

(2) $\operatorname{def}(\mathcal{A}) = 0$*;*

(3) $r(\mathcal{A}) = \mathrm{dim}X$*;*

(4) $\mathrm{im}\mathcal{A} = X$*, демек* $\mathcal{A}$ *операторы сюръектив бейнелеу;*

(5) $\mathcal{A}$ *операторы инъектив бейнелеу;*

(6) $\mathcal{A}$ *операторының барлық матрицалары ерекше емес.*

Дәлелдеу. Ерекше емес оператордың 87.1-анықтама мен 85.6-теорема бойынша, (1)–(4)-тұжырымдардың пара-пар болатыны айқын.

(1)- және (5)-тұжырымдардың пара-пар болатынын көрсетейік. Егер $\mathcal{A}$ ерекше емес оператор және $x_1, x_2 \in X$ екі вектор үшін $\mathcal{A}x_1 = \mathcal{A}x_2$ болса, онда $\theta = \mathcal{A}x_1 - \mathcal{A}x_2 = \mathcal{A}(x_1 - x_2)$. Демек, $x_1 - x_2 \in \mathrm{ker}\mathcal{A} = \{\theta\}$. Ендеше, $x_1 = x_2$. Сонымен, $\mathcal{A}$ операторы инъектив бейнелеу болады. Керісінше, егер $\mathcal{A}$ инъектив бейнелеу болса, онда $\mathrm{ker}\mathcal{A} = \{\theta\}$. Өйткені $\mathcal{A}\theta = \theta$ теңдігі кез келген сызықтық операторторға орындалады.

(3) және (6) пара-пар болатыны 85.5-тұжырым және матрицаның ерекше емес болу критерийлерінен (47.2-теорема және 42.3.2-салдардан) шығады.

87.1-ескерту. Сызықтық операторлардың инъектив және сюръектив қасиеттері пара-пар болатынына ерекше назар аудара кетейік.

87.3-теорема: *n өлшемді $\langle X, P\rangle$ сызықтық кеңістіктігінің ерекше емес түрлендірулері өзара көбейту амалы бойынша топ құрайды. Сол топ элементтері P өрісінен алынған n-ретті $GL(n, P)$ ерекше емес матрицалар тобына изоморф. Осы себептен $GL(n, P)$ тобы n-ретті матрицалар сызықтық тобы деп аталады.*

Дәлелдеу 86.6- және 87.2-теоремаларға сүйенеді. $GL(n, P)$ тобы $\langle \mathcal{M}_n(P), +, \cdot\rangle$ сақинасының кері айналымды элементтер тобы болатыны 42.3.2-салдардан шығады: *шаршы матрица кері айналымды болу үшін оның рангі ретіне тең болуы қажетті және жеткілікті.* Сондықтан, ерекше емес операторлар жиыны $\langle \mathcal{L}(X, X), +, \circ\rangle$ сақинасында операторларды өзара көбейту және керілеу амалдары бойынша тұйық болуы сонымен қатар ерекше емес операторлар керіленетін операторларға дәлме дәл келетінін көрсетуіміз жеткілікті. Ондай болғанда 86.6-теоремадағы изоморфизм қарастырылып отырған топтардың да изоморфизмі болып шығады.

87.2-теорема бойынша, ерекше емес сызықтық оператор X сызықтық кеңістігін өзіне бейнелейтін сызықтық қасиеті бар биекция. Демек, сызықтық оператор X сызықтық кеңістігін өзіне өзін бейнелейтін изоморфизм болып табылады. Ондай изоморфизмдерді *автоморфизм* деп атайды. Изоморфизмдер қасиеттері бойынша, автоморфизмге кері бейнелеу автоморфизм болады және екі автоморфизмнің көбейтіндісі қайтадан автоморфизм болады. Сонымен, ерекше емес операторлар $\circ$ көбейту амалы бойынша топ құрайды.

Әрине, әрбір автоморфизм керіленетін сызықтық оператор болады. Керісінше, $\mathcal{A}$ операторы $\langle \mathcal{L}(X,X), +, \circ \rangle$ сақинасының керіленетін элементі болсын, яғни бір $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(X,X)$ үшін $\mathcal{A} \circ \mathcal{B} = \mathcal{B} \circ \mathcal{A} = \mathcal{E}$ теңдіктері орындалсын. Қандай да бір $x \in X$ вектор үшін $\mathcal{A}x = \theta$ болсын. Осы теңдіктің екі жағына да $\mathcal{B}$ операторын қолданайық. Онда

$$\mathcal{B}(\mathcal{A}x) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})x = \mathcal{E}x = x \text{ және } \mathcal{B}\theta = \theta.$$

Ендеше $x = \theta$. Демек, $\mathcal{A}$ операторы ерекше емес. Дәл осындай жолмен $\mathcal{B}$ операторының ерекше еместігін аламыз. Теорема дәлелденді.

Бақылау сұрақтары

87.1-сұрақ. $\dim X = 1$ болсын. $\mathcal{L}(X,X)$ сақинасындағы керіленетін операторлар тобы коммутатив бола ма?

87.2-сұрақ. $\dim X = 2$ болсын. $\mathcal{L}(X,X)$ сақинасындағы керіленетін операторлар тобы коммутатив бола ма?

87.3-сұрақ. $\dim X = 3$ болсын. $\mathcal{L}(X,X)$ сақинасындағы керіленетін операторлар тобы коммутатив бола ма?

87.4-сұрақ. Жазықтықтың Φ_φ бұру операторына қандай оператор кері болады?