1. Логика алгебрасының функциялары.

Анықтама 1. $E_2 = \{0,1\}$ – негізгі жиын(айнымалылар мәндерінің бастапқы алфавиті), онда $E_2^n = \{(a_{1,\dots,}a_n) \mid \forall t \ \alpha_t \in E_2\}$. Онда $f(x_{1,\dots,}x_n) : E_2^n \longrightarrow E_{2.}$ функциясын тұтас анықталған буль функциясы деп атаймыз. Бұндай функцияларды кесте арқылы немесе басқа қарапайым функциялардың суперпозициясы арқылы беруге болады.Мысалы $n=1$ болғанда

x	0	1		
0	0	1	0	
1	0	1		

Бұл жағдайда 0 функциясы нөлдік константа, 1 функциясы – бірлік константа, x - тепе - тең, а $\overline{x}$ функциясы x функциясының терістеуі деп аталады. При этом длят последней функции допускается также иное обозначение: $\overline{x} \equiv \neg x$.

$n=2$ үшін:

$x \quad y$	f_1						
0 0	0	0	0	1	1	1	1
0 1	1	0	1	1	0	1	0
1 0	1	0	1	0	0	1	0
1 1	1	1	0	1	1	0	0

Кестені толтыру кезінде айнымалылар бағаналары лексикографикалық ретпен толтырылады(екілік сандардың өсу ретімен).

f_1 *– дизъюнкция,«немесе» функциясы, логикалық қосынды*: $f_1 = x \vee y$.

f_2 *– конъюнкция,«және» функциясы* : $f_2 = x \bullet y = x \,\&\, y = xy = x \wedge y$

f_3 – 2 модулі бойынша қосу 2 (қатаң «немесе»): $f_3 = x \oplus y = x + y$

f_4 – импликация: $f_4 = x \rightarrow y$

f_5 – эквиваленттілік: $f_5 = x \sim y = \overline{x \oplus y} = x \leftrightarrow y$

f_6 – Шеффер таяқшасы: $f_6 = x \mid y = \overline{x \cdot y}$

f_7 – Пирса жебесі: $f_7 = x \downarrow y = \overline{x \vee y}$

Лемма(сөздер саны туралы). r әріптен тұратын $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ алфавитіндегі ұзындығы m - ге тең әртүрлі сөздер саны r^m - ге тең болады.

Дәлелдеуі. m бойынша индукцияны қолданамыз. $m=1$ үшін тұжырым айқын. Енді лемманың тұжырымы $m-1$ үшін дұрыс деп есептейік, яғни ұзындығы $m-1$ болатын сөздер сан дәл r^{m-1} - ге т болсын. Әрбір осындай ұзындығы $m-1$ болатын сөздің соңына бір әріпті қосудың барлық мүмкінд r - ге тең. Ал ұзындығы $m-1$ болатын сөздер санының барлығы r^{m-1} болғандықтан, ұзындығы m ге тең сөздердің барлығы $r \cdot r^{m-1} = r^m$ болады. Лемма дәлелденді.

n айнымалылы логика алгебрасының қандай да бір формуласын қарастырайық.

$$
\begin{array}{c}
\quad x_1\; x_2 \ldots x_n \;\; | f \\
2^n \left\{ \begin{array}{l|l}
0\;\; 0 \ldots \;\; 0 & \alpha_0 \\
0\;\; 0 \ldots \;\; 1 & \alpha_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
1\;\; 1 \ldots \;\; 1 & \alpha_{2^n-1}
\end{array} \right\} 2^{2^n}
\end{array}
$$

Оны анықтау үшін оның 2^n тізімнен тұратын айнымалылар мәндеріндегі мәндерін анықтасақ жеткілікті. Демек n айнымалыдан тұратын барлық функциялар саны ұзындығы 2^n болатын нөл мен бірлерден тұратын барлық тізімдер санына тең, яғни олардың саны 2^{2^n} болады.

Соңғы айтқанымыздан барлық 10 айнымалылардан тұратын функциялар санын бағалап көрелі. Бұл функциялар саны $2^{2^{10}} = 2^{1024} \succ 2^{1000} = (2^{10})^{100} \succ (1000)^{100} = 10^{300}$ санынан артық болады. Көріп отырғанымыздай, айнымалылар санының өсуі функциялар санының өте тез өсуіне алып келетінін байқатады, сондықтан функцияларды көп жағдайда кесте арқылы беру тиімсіз.

2. Функциялар теңдігі. Күнделікті алгебрадан $x + y - y = x$ теңдігінің орындалатынын білеміз, яғни функциялар теңдігі олардың неше айнымалылы болатынына әрқашан тәуелді бола бермейді(теңдіктің сол жағында екі айнымалылы, ал оң жағында бір айнымалылы функция жазылған). Демек біз функциядағы маңызды және жасанды айнымалылар туралы айтуымызға болады.

Анықтама 2. Егер x_i айнымалысы үшін $a_1,...,a_{i-1},a_{i+1},...,a_n \in E_2$ мәндері табылып, $f(a_1,...,a_{i-1},0,a_{i+1},...,a_n) \neq f(a_1,...,a_{i-1},1,a_{i+1},...,a_n)$ шарты орындалса, онда оны логика алгебрасының $f(x_1,...,x_n)$ функциясының *маңызды* айнымалысы деп айтамыз.

Тек x_i айнымалысында ғана өзгешелігі бар тізімдерді x_i айнымалысына қарағанда көрші тізімдер деп айтамыз. Кері жағдайда, яғни кез келген өзіне қарағанда көрші тізімдер үшін функция мәні өзгермесе, онда x_i айнымалысын берілген функцияға қарағанда *жасанды* айнымалылар дейді

Егер x_i айнымалысы f функциясына қарағанда жасанды болса, онда f функциясы қандай да бір $g(x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n)$ функциясымен толық анықталады. Кез келген функцияның кестесін жаң жасанды айнымалылар енгізу арқылы қалағанымызша ұлғайтуға болады.

Анықтама 3. Егер берілген логика алгебрасының екі функциясының бірін екіншісінен жасанд айнымалыларды енгізу немесе аластау арқылы алуға болса, оларды тең функциялар деп айтады.

3.Формулалар.

Анықтама 4. Келесі функциялар жиыны берілсін:

$$A = \{f_1(...), f_2(...),..., f_n(...),...\}.$$

Осы А жиынында анықталған формула ұғымын енгізейік:

1) А жиынының кез келген функциясын А – да анықталған формула дейміз.

2) Егер $f(x_1,...,x_n) \in A$ және кез келген $i(1 \le i \le n)$ үшін H_i - айнымалы немесе А – да анықталғ формула болса, онда $f(H_1,...,H_n)$ өрнегі де А – да анықталған формула болады.

3) А – да анықталған кез келген формуланы 1 және 2 ережелерді ақырлы рет қолдану арқылы аламыз.

Ескерту. $H_1,...,H_n$ тізімінің ішінде бірдейлері кездесуі әбден мүмкін.

4⁰. Негізгі эквиваленттіліктер.

1. *Алмастырымдылық.*

$x \vee y = y \vee x,\; xy = yx,\; x \oplus y = y \oplus x,\; x \sim y = y \sim x.$

2. *Терімділік.*

$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z,\; x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z,\; x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$.

3. *Үлестірімділік.*

$(x \oplus y)z = (xz) \oplus (yz),\ (x \vee y)z = (xz) \vee (yz),\ (xy) \vee z = (x \vee z) \cdot (y \vee z)$.

4. *Де Морган заңдары*.

$\overline{\overline{x}} = x,\ \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y},\ \overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$.

5. *Жұтылу заңдары*.

$x \vee x = x,\ x \cdot x = x,\ x \vee \overline{x} = 1,\ x \cdot \overline{x} = 0,\ x \vee 1 = 1,\ x \cdot 1 = x,\ x \vee 0 = x,\ x \cdot 0 = 0$.

6. *Кейбір пайдалы эквиваленттіліктер*.

$x \mid y = \overline{x \cdot y},\ x \downarrow y = \overline{x \vee y},\ x \to y = \overline{x} \vee y,\ x \oplus y = (x \cdot \overline{y}) \vee (\overline{x} \cdot y)$.

Осы айтылған эквиваленттіліктермен бірге, түрлендіру кезінде келесі ережелерді есте ұстаған жөн.

Конъюнкция ережелері: 1. $x \cdot y = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 1$.

2. 1 – ді конъюнкция кезінде ескермеуге болады.

Дизъюнкция ережелері: 1. $x \cdot y = 0 \Leftrightarrow x = 0, y = 0$.

2. Дизъюнкция кезінде 0 – ді ескермеуге болады.