manat@maths.kz

Графтар теориясына кіріспе

Анықтама 1. Кез келген V жиыны мен V жиынының элементтерінің парларынан тұратын E бинарлық қатынасын *граф* деп айтамыз. Белгілеуі: $G = (V, E)$.

Біз көп жағдайда ақырлы графтарды зерттейміз.

Анықтама 2. Егер E жиынының элементтерін реттелмеген парлар ретінде қарастырсақ, ондай графты *бағытталмаған*(*симметриялы*) деп, ал парлар оның *қырлары* деп аталады. Кері жағдайда граф *бағытталған*, ал E жиынының элементтері графтың *доғалары* деп аталады.

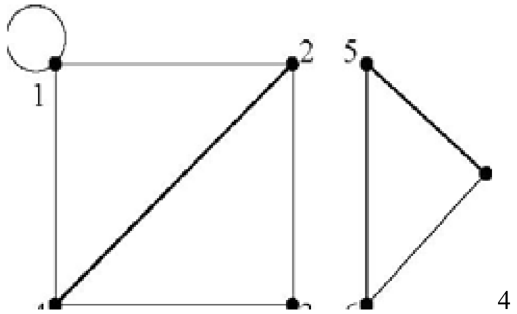
Анықтама 3. (a, a) пар *тұзақ* делінеді, егер E жиынтығында (a, b) пары бірнеше рет кездессе, оны *еселі қыр*(*доға*) деп айтады.

Анықтама 4. Бұдан былай тұзақсыз және еселі қырларсыз графты бағытталмаған(немесе жайғана граф), тұзақсыз графты *мультиграф*, ал тұзақтар кездесетін мультиграфты *псевдограф* дейміз.

Анықтама 5. Қыр арқылы жалғасқан граф төбелерін *іргелес* деп айтады.

Анықтама 6. Егер қандай да бір төбе қырға тиісті болса, онда оларды *инцидентті* деп айтады.

Анықтама 7. *Төбенің дәрежесі* ($\deg v$) осы төбемен инцидентті қырлар санын айтады. Псевдографтардағы тұзақтар дәрежені есептегенге екі рет кіреді.



Тұжырым 1. Егер p — төбелер саны, ал q — қырлар саны болса, онда кез келген граф (псевдограф) үшін келесі теңдік орындалады

$$\sum_{i=1}^{p} \deg v_i = 2q \text{ ,.}$$

Дәлелдеуі. Біз берілген төбенің дәрежесін санағанда, одан шыққан қырлардың санын есептейміз. Барлық төбелердің дәрежесін қосқанда, бұл қосындыда әрбір қыр екі рет есептелгенін көреміз(тұзақтар анықтамасы бойынша екі рет есептеледі).

Анықтама 8. Графтың төбелерінің жиыны $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$. Онда v_i және v_j төбелері іргелес болғанда $a_{ij} = 1$, кері жағдайда $a_{ij} = 0$(мультиграф немесе псевдограф үшін 2,3,..) болатындай $A = \|a_{ij}\|$ матрицасы *іргелестік матрицасы* деп аталады. Бұл жағдайда a_{ii} шамасының мәні v_i төбесіндегі тұзақтар санына тең.

Анықтама 9. $G_1 = (V_1, E_1)$ және $G_2 = (V_2, E_2)$ графтары(немесе псевдографтары)берілсін. Егер φ_1: $V_1 \to V_2$ және φ_2: $E_1 \to E_2$ өзара бірмәнді бейнелеулері мен G_1 графының кез келген u және v төбелеріүшін $\varphi_2(u, v) = (\varphi_1(u), \varphi_1(v))$ теңдігі орындалса, бұл графтарды *изоморфты* деп айтамыз.

Анықтама 10 (тұзақсыз және еселі қырларсыз графтардың изоморфтылығы). $G_1 = (V_1, E_1)$ және $G_2 = (V_2, E_2)$ графтары үшін өзара бірмәнді φ_1: $V_1 \to V_2$ бейнелеуі табылып, $(u, v) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(u), \varphi(v)) \in E_2$ шарты орындалса, онда бұл графтар *изоморфты* деп аталады.

Анықтама 11. $V_1 \subseteq V$ және $E_1 \subseteq E$ болса, онда $G_1 = (V_1, E_1)$ графын $G = (V, E)$ графының ішкі графы деп айтады.

Анықтама 12. G = *(V,E)* графының төбелері мен қырларынан тұратын

$v_0,(v_0,v_1),v_1,(v_1,v_2),v_2,...,v_{n-1},(v_{n-1},v_n),v_n$

тізбегін *жол* деп атаймыз. Осындағы n саны жолдың ұзындығы деп аталады.

Анықтама 13. Қырлары қайталанбайтын жолды *тізбек деп атайды*.

Анықтама 14. Төбелері қайталанбайтын жол *қарапайым тізбек* деп аталады.

Тұжырым 2. G = *(V, E)* графында P - v_1 төбесінен $v_2(v_1 \neq v_2)$ төбесіне апаратын жол болсын. Онда P жолынан v_1 төбесінен $v_2(v_1 \neq v_2)$ төбесіне апаратын, қарапайым тізбек болатын ішкі жолды алуға болады.

Дәлелдеуі. Берілген жол қарапайым тізбек болмасын дейік. Онда оның қандай да бір v төбесі бұл жолда қайталанады. Жолдың осы бөлігі $P_1 = v_0C_0vC_1vC_2v_n$ болсын. Егер одан $P_2 = C_0v$ ішкі жолын алып тастаса, бір қайталану азаяды. Осы әрекетті бірнеше рет қайталау арқылы бастапқы жолдың төбелері бір реттен ғана кездесетін жолды аламыз. Ол қарапайым тізбек болады.

Анықтама 15. Жолда $v_0 = v_n$ болса, ол *тұйық жол* деп аталады.

Анықтама 16. Қырлары қайталанбайтын тұйық жол *цикл* деп аталады.

Анықтама 17. Төбелері қайталанбайтын тұйық жол *қарапайым цикл* деп аталады.

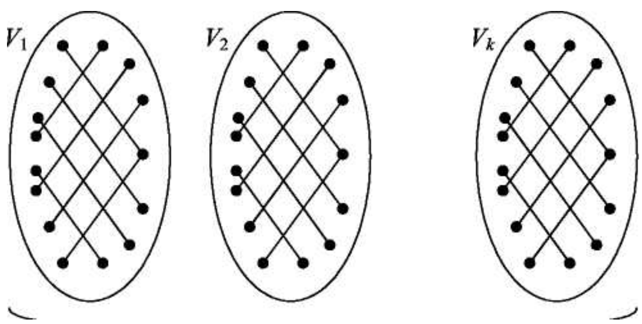
Анықтама 18. Кез келген екі төбесінің арасында жол болатын графты *байланған* деп атайды. Әрбір төбе өзімен жол арқылы жалғанған деп есептеледі. Ол жолдың ұзындығы нөлге тең.

v_i төбесінен v_j төбесіне жол болса, оны $v_i \to v_j$ қатынасымен белгілейміз. Бұл қатынас

1) симметриялы, өйткені $v_i \to v_j \Rightarrow v_j \to v_i$,
2) транзитивті, өйткені $(v_i \to v_j)\,\&\,(v_j \to v_k) \Rightarrow (v_i \to v_k)$,
3) рефлексивті, өйткені $\forall i(v_i \to v_i)$.

Демек біз анықтаған $\to$ қатынасы берілген графтағы эквиваленттік қатынас болады. Сондықтан осықатынасқа сәйкес графтың бөліктеуі анықталады. Ол бөліктерді графтың *байланған компоненттері деп айтамыз*. Сонымен кез келген *G* = (*V*, *E*) графы

$1)\bigcup_{i=1} V_i = V$: $2) i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \varnothing$. шарттары орындалатындай *G* = (*V*, *E*) графының байланған $G_i = (V_i, E_i)$ ішкі графтарға, яғни байланған ішкі компоненттерге жіктеледі.



Графтың байланған компоненттері

2. Ағаштар. Қасиеттері.

Анықтама *1*. Циклсыз байланған графты *ағаш* деп атайды.

Анықтама 2. Егер $G_1 =< V_1, E_1 >$ – $G =< V, E >$ ішкі графы, $V_1 = V$ және ағаш болса, онда $G_1 =< V_1, E_1 >$ ішкі графын *діңгек ағаш* деп атаймыз.

Лемма 1. Егер $G =< V, E >$ графы байланған және оның (*a, b*) қыры қандай да бір циклда орналасса, онда бұл қырды *G* графынан алып тастағанда*,* тағы да байланған граф пайда болады.

Дәлелдеуі. Шынында *G* графынан (*a, b*) қырын шығарғанда, *a* төбесінен *b* төбесіне циклдың қалған бөлігі арқылы баруға болады, демек олар бір байланған компонент ішінде орналасқан. Лемма

manat@maths.kz

дәлелденді.

Теорема 1. Кез келген байланған графтың ең болмағанда бір діңгек ағашы болады.

Дәлелдеуі. Егер G графының циклы болмаса, онда ол іздеген діңгек ағашымыз болады. Енді G графында цикл бар деп есптейік. Онда ол циклдан лемма бойынша қандай да бір қырды алып тастауға болады. Пайда болған G_1 ішкі графы – байланған граф. Егер G_1 графында цикл болмаса, онда G_1 іздеген діңгек ағашымыз болады, кері жағдайда осы процесті қайталаймыз. Ал E – ақырлы жиын болғандықтан бұл процес аяқталады. Теорема дәлелденді.

Лемма 2. Егер байланған графтың сол төбелеріне тағы да қыр қосылса, онда цикл пайда болады.

Дәлелдеуі. Кез келген байланған $G = (V, E)$ графын қарастырайық. $u, v \in V$ және $(u, v) \notin E$ болсын. G байланған граф болғандықтан, онда оның v төбесінен u төбесіне жол бар. Онда G-де v-дан u –ға қарапайым тізбек те болады. Оны C арқылы белгілейік. Демек бұл алынған графта C, (u, v), v цикл құрады. Лемма дәлелденді.

Лемма 3. $G = (V, E)$ графының p төбесі, q қыры болсын. Онда G графының кемінде $p - q$ байланған компоненті болады. Егер G графында цикл болмаса, онда G дәл $p - q$ юайланған компоненттен тұрады.

Дәлелдеуі. u және v төбелері тиісті болатын H графына (u, v) қырын қосайық. Онда, егер u және v төбелері H графының әртүрлі компоненттерінде жатса, онда байланған компоненттер саны 1 – ге кемиді. Егер u және v төбелері H графының бір компонентінде жатса, онда байланған компоненттер саны өзгермейді. Демек байланған компоненттер саны 1 – ден артық кемімейді. Ендеше жаңадан q қыр қосылса, байланған компоненттер саны q-ден артыққа кемімейді. Ал G графы $G_1 = < G, \varnothing >$ графына q қырды қосу арқылы алынғандықтан, G графында кемінде $p - q$ байланған компонент болады. Енді G графында цикл жоқ деп есептейік және G графын G_1 графынан алу барысында (u, v) қыры қосылсын. Егер u мен v төбелері бір байланған компонентте жатса, онда G графында 2 леммаға сәйкес цикл пайда болар еді. Демек u және v төбелері әртүрлі байланған компоненттерде орналасқан, яғни (u, v) қосылғаннан кейін байланған компоненттер саны дәл 1-ге кемиді. Онда G графы дәл $p - q$ байланған компоненттен тұрады. Лемма дәлелденді.

Теорема 2 (ағаштың әртүрлі анықтамаларының парапарлығы). Келесі бес тұжырым өзара парапар(p — төбелер саны, q — қырлар саны):

1) G — ағаш;

2) G — циклсыз және $q = p - 1$;

3) G — байланған граф және $q = p - 1$;

4) G — байланған граф, бірақ кез келген қыр алынса, ол байланбаған болады;

5) G — циклсыз, бірақ кез келген ондағы төбелердің екеуінің кез келгенін қырмен қоссақ, цикл пайда болады.

Дәлелдеуі. Келесі нұсқа бойынша дәлелдейміз: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1), бұдан кез келген екі шарттың екеуі өзара парапар болады.

1) $\Rightarrow$ 2): G — байланған граф және G циклсыз болғандықтан, онда 3 лемма бойынша $p - q = 1$. Демек $q = p - 1$.

2) $\Rightarrow$ 3): 3 лемма бойынша G графындағы байланған компоненттер саны $p - q = 1$, яғни G — байланған граф.

3) $\Rightarrow$ 4): бір қырын алып тастағанда $p - q = 2$. Онда 3 лемма бойынша байланған компоненттер саны $p - q = 2$ –ден кем емес.

4) $\Rightarrow$ 5): егер G-де цикл болса, онда 1 лемма бойынша, онда граф байланған күйінде қалатындай етіп, бір қырын алып тастауға болады. 2 лемма бойынша G графының төбелерін қосатын жаңа қыр қоссақ, онда цикл пайда болады.

5) $\Rightarrow$ 1): егер G байланбаған граф болса және u, v төбелері G графының әртүрлі байланған компоненттерінде жатса, онда G графына (u, v) қырын қосу жаңа циклдың пайда болуына әкелмейді, бұл (5) –ке қайшы. Демек, G -байланған граф. Теорема дәлелденді.

3. Түбірлік ағаштар. Олардың сандарын жоғарыдан бағалау.

manat@maths.kz

Анықтама 1. *Түбір* деп аталатын бір төбесі оқшауланған ағашты *түбірлік ағаш* деп атайды.

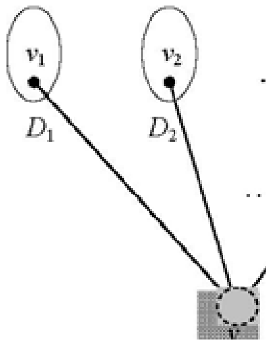
Анықтама 2. 1) Оқшауланған бір төбеден тұратын графты *түбірлік ағаш* деп атайды.

2) Түбірлері $v_1,...,v_m$ болатын D_1, D_2, …, D_m түбірлік ағаштары берілсін және $D_i =< V_i, E_i >$, $i \neq j \Rightarrow V_i \cap V_j = \varnothing$. Онда, кез келген $v \notin \bigcup_{i=1}^{m} V_i$ үшін

$V = \bigcup_{i=1}^{m} V_i \cup \{v\}, E = \bigcup_{i=1}^{m} E_i \cup \{(v, v_1),...,(v, v_m)\}$ шартымен анықталған $D =< V, E >$ ағашын *түбірлік ағаш* деп атайды.

3) Тек (1) және(2) шарттарды ақырлы рет қолдану анықталған ағашты *түбірлік* деп атайды.

Мұндағы D_1, D_2, …, D_m – D ағашының *ішкі ағаштары* деп аталады.



Тұжырым. 1 және 2 анықтамалар парапар болады.

Анықтама 3. Реті анықталған түбірлік ағашта

1) ішкі ағаштары реттелген және

2) әрбір ішкі D_i *ағашы* реттелген ішкі ағаш.

Шарттары орындалса, оны *реттелген түбірлік* ағаш деп аталады

Дерево с одной вершиной также является упорядоченным поддеревом.

Теорема 3. Қырлар саны q болатын реттелген түбірлік ағаштар саны 4^q -ден артпайды.

Дәлелдеуі. Реттелген ағашты шолуға арналған «тереңдетіп іздеу» алгоритмін қарастырайық. Бұл алгоритмнің сипаттауы төмендегідей:

1) Түбірінен баста. Шолуды ішкі ағаштар болғанда жалғастыр:

2) Келесі ішкі ағаштың түбіріне көшіп, осы ішкі ағашты тереңдетіп шолып шық.

3) Осы ішкі ағаштың түбіріне орал.

Нәтижесінде «тереңдетіп шолу» барысында, біз әр қыр арқылы екі рет өтеміз: бірінші рет келесі ішкі ағашқа көшкенде, екінші рет осы ішкі ағаштың түбіріне қайта оралғанда. «Тереңдетіп шолуға» сәйкес 0 мен 1-ден тұратын тізбектер құрамыз: 0 – әрбір келесі ішкі ағашқа өту барысында жазылады, ал 1-ді ішкі ағаштан қайтқанда қойылады. Нәтижесінде ұзындығы $2q$ болатын 0 мен 1-ден тұратын тізбек аламыз. Ол ағаштың коды деп аталады, оны ағаштың коды деп атаймыз. Бұл код бойынша ағашты толық құра аламыз. Ал ұзыныдығы $2q$ болатын 0 мен 1-лер тізбектерінің саны $2^{2q} = 4^q$ болғандықтан, мұндай ағаштар саны одан артпайды. Теорема дәлелденді.